2025 年广东省初中学业水平考试•数学

学校：______________ 班级：______________ 姓名：______________

全卷总分：120 分　　考试时间：120 分钟

一、选择题(本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1. 某品牌乒乓球产品质量参数是 2.74 g±0.02 g,如果一只乒乓球的质量高于标准质量 0.02 g 记作+0.02 g,那么低于标准质量 0.02 g 记作（　　）

A.－0.02g　　　　B.+0.02g

C.－0.04g　　　　D.+0.04g

1. A

2. 依据《广东省推动低空经济高质量发展行动方案(2024—2026 年)》，预计 2026 年广东省低空经济规模将超过 3 000 亿元.数据 3 000 亿用科学记数法表示为（　　）

A.3×10^{9}　　　　B.3×10^{10}

C.30×10^{10}　　　　D.3×10^{11}

2. D

【解析】 3000 亿=300000000000=3×10^{11}.

3. 计算 $\sqrt{12}\times\sqrt{3}$的结果是（　　）

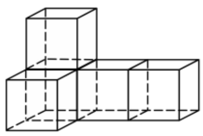
A.3　　　　B.6

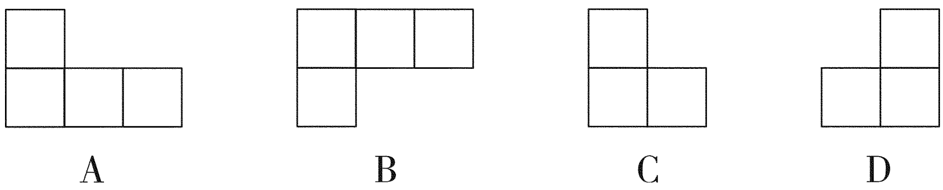
C.$\sqrt{6}$　　　　D.2 $\sqrt{6}$

3. B

【解析】 $\sqrt{12}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}\times\sqrt{3}=6$.

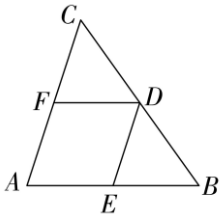
4. 如图，是由 5 个大小相同的正方体组成的立体图形，它的左视图是（　　）





4. C

5. 如图,点 D,E,F 分别是 $\triangle ABC$ 各边上的中点，$\angle A=70°$,则 $\angle EDF=$（　　）



A.20°　　B.40°

C.70°　　D.110°

5. C

【解析】∵点 D，E，F 分别是△ABC 各边上的中点，∴DE，DF 为△ABC 的中位线，∴$DE\parallel AC$，$DF\parallel AB$，∴四边形 $AEDF$ 为平行四边形，∵$\angle A=70°$，∴$\angle EDF=70°$.

6. 某校机器人编程团队参加广东省创意机器人大赛，7 位评委给出的分数为 95，92,96,94,95,88,95. 这组数据的中位数、众数分别是（　　）

A.92,94　　B.95,95

C.94,95　　D.95,96

6. B

【解析】将这 7 个分数由高到低或由低到高排列，中间的数字即为中位数，∴中位数为 95；众数是这组数据中出现次数最多的数字，95 出现的次数最多，∴众数是 95.

7. 广东省统计局的相关数据显示，近年来高技术制造业呈现快速增长态势.某公司工业机器人在今年 5 月产值达到 2 500 万元，预计 7 月产值将增至 9 100 万元.设该公司 6，7 两个月产值的月均增长率为 x，可列出的方程为（　　）

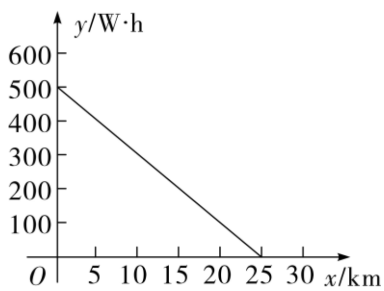
A.$2500(1+x)^2=9100$　　B.$2500(1-x)^2=9100$

C.$2500(1-2x)^2=9100$　　D.$2500(1+2x)^2=9100$

7. A

【解析】∵5 月产值为 2 500 万元，6，7 两个月产值的月均增长率为 x，预计 7 月份的产值为 9 100 万元，∴可列出的方程为 $2\,500(1+x)^2=9\,100$.

8. 在理想状态下，某电动摩托车充满电后以恒定功率运行，其电池剩余的能量 y(W·h)与骑行里程 x(km)之间的关系如图.当电池剩余能量小于 100 W·h 时，摩托车将自动报警.根据图象，下列结论正确的是（　　）



A.电池能量最多可充 400 W·h

B.摩托车每行驶 10 km 消耗能量 300 W·h

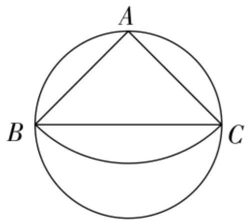
C.一次性充满电后，摩托车最多行驶 25 km

D.摩托车充满电后，行驶 18 km 将自动报警

8. C

【解析】由图象可知，当 x=0 时，y=500，∴电池能量最多可充 500 W·h，故 A 选项不符合题意；每行驶 1 km 消耗能量 $\frac{500}{25}$=20 W·h，∴行驶 10 km 消耗能量为 10×20=200 W·h，故 B 选项不符合题意；一次性充满电后，由图象可知，摩托车最多行驶 25 km，故 C 选项符合题意；行驶 18 km 剩余能量为 500-20×18=140＞100，摩托车不报警，故 D 选项不符合题意.

9. 如图，在直径 BC 为 $2\sqrt{2}$的圆内有一个圆心角为 90°的扇形 ABC.随机地往圆内投一粒米，该粒米落在扇形内的概率为（　　）



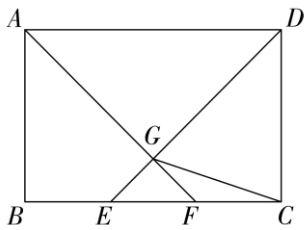
A. $\frac{1}{5}$　　　　B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{3}$　　　　D. $\frac{1}{2}$

9. D

【解析】圆的面积为 $\pi\times(\frac{2\sqrt{2}}{2})^2=2\pi$，∵$BC$ 是直径，∴$\angle BAC$=90°，∵AB=AC，∴△ABC 为等腰直角三角形，∵BC＝$2\sqrt{2}$，∴AB=AC=2，∴扇形 BAC 的面积为 $\frac{90\times\pi\times2^2}{360}=\pi$.∴该粒米落在扇形内的概率为 $\frac{\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}$.

10. 如图,在矩形 $ABCD$ 中,E,F 是 BC 边上的三等分点,连接 DE,AF 相交于点 G，连接 CG.若 AB=8,BC=12,则 $\tan\angle GCF$ 的值是（　　）

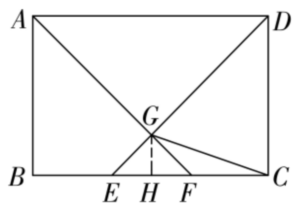


A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$　　　　B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$　　　　D. $\frac{2}{3}$

10. B

【解析】如答案图，过点 G 作 $GH\perp BC$ 于点 H，∵E，F 是 BC 边上的三等分点，$BC=12$，∴$BE=EF=FC=4$，∴$BF=CE$，∵四边形 $ABCD$ 是矩形，∴$AB=CD$，$\angle ABC=\angle BCD=90°$，∴$\triangle ABF\cong\triangle DCE$（SAS），∴$\angle AFB=\angle DEC$，∴$\triangle GEF$ 为等腰三角形，∵$GH\perp BC$，∴$EH=HF=2$.∵$\angle B=90°$，∴$GH\parallel AB$，∴$\triangle FGH\backsim\triangle FAB$，∴ $\frac{FH}{FB}=\frac{GH}{AB}$，即 $\frac{2}{8}=\frac{GH}{8}$，∴$GH=2$，在 $\mathrm{Rt}\triangle CGH$ 中，$\tan\angle GCF=\frac{GH}{CH}=\frac{1}{3}$.



答案图

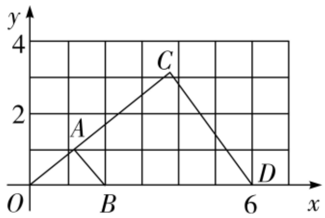
二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

11. 因式分解：$a^2b+ab^2=$______.

11. $ab(a+b)$

【解析】$a^2b+ab^2=ab(a+b)$.

12. 如图,把$\triangle AOB$ 放大后得到$\triangle COD$,则$\triangle AOB$ 与$\triangle COD$ 的相似比是______.



12. 1:3

【解析】∵$\triangle COD$ 是由$\triangle AOB$ 放大得到的，∴$\triangle AOB\backsim\triangle COD$，∴$OB:OD=OA:OC=AB:CD$,∵$B(2,0)$,$D(6,0)$,∴$OB=2$,$OD=6$,∴相似比为 $OB:OD=1:3$.

13. 不解方程，判断一元二次方程 $2x^2+x-1=0$ 的根的情况是______.

13. 有两个不相等的实数根

【解析】∵$b^2-4ac=1^2-4\times2\times(-1)=9>0$,∴一元二次方程 $2x^2+x-1=0$ 有两个不相等的实数根.

14. 计算 $2^0-2\sin 30°$的结果是______.

14. 0

【解析】$2^0-2\sin 30°=1-2\times\frac{1}{2}=1-1=0$.

15. 已知二次函数 $y=-x^2+bx+c$ 的图象经过点$(c,0)$，但不经过原点，则该二次函数的表达式可以是______.(写出一个即可)

15. $y=-x^2+1$（答案不唯一）

【解析】∵二次函数 $y=-x^2+bx+c$ 的图象经过点（c,0），但不经过（0,0），

得 $\begin{cases}-c^2+bc+c=0\\ c\neq 0\end{cases}$,∴$-c+b+1=0$,∴$b=c-1$,∴二次函数为 $y=-x^2+(c-1)x+c$，∵$c\neq0$，∴c 可以取 1，当 $c=1$ 时，二次函数为 $y=-x^2+1$（答案不唯一）.

三、解答题(一)(本大题共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分)

16. 在解分式方程 $\frac{1-x}{x-2}=\frac{1}{2-x}-2$ 时，小李的解法如下：

第一步：$\frac{1-x}{x-2}\cdot(x-2)=-\frac{1}{x-2}\cdot(x-2)-2$,
第二步：$1-x=-1-2$,
第三步：$-x=-1-2-1$,
第四步：$x=4$.
第五步：检验：当 $x=4$ 时，$x-2\neq0$,
第六步：∴原分式方程的解为 $x=4$.

小李的解法中哪一步是去分母?去分母的依据是什么?判断小李的解答过程是否正确，若不正确，请写出你的解答过程.

16. **解：**第一步是去分母，

依据是等式的性质：等式的两边同时乘（或除以）同一个不为 0 的数（或式子），等式仍然成立，

小李的解答过程不正确，

正确的解答过程如下：

$\frac{1-x}{x-2}=\frac{1}{2-x}-2$

$\frac{1-x}{x-2}\cdot(x-2)=-\frac{1}{x-2}\cdot(x-2)-2(x-2)$,

$1-x=-1-2x+4$,

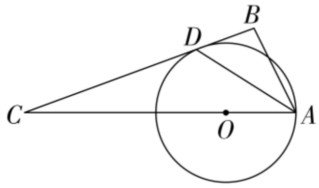
$x=-1+4-1$,

$x=2$,

检验：当 $x=2$ 时，$x-2=0,2-x=0$,

∴原分式方程无解.

17. 如图,点 O 是 Rt△ABC 斜边 AC 边上的一点，以 OA 为半径的⊙O 与边 BC 相切于点 D.求证：AD 平分∠BAC.



17. 证法一：如答案图，连接 OD,

易得 OD 是⊙O 的半径，

∵⊙O 与 BC 相切于点 D,

∴$OD\perp BC$,

∵$\triangle ABC$ 是直角三角形，$\angle B=90°$，

∴$AB\perp BC$,

∴$AB\parallel OD$,

∴$\angle ODA=\angle DAB$,

∵$OD=OA$，∴$\angle ODA=\angle OAD$,

∴$\angle OAD=\angle BAD$,

∴AD 平分$\angle BAC$.

证法二：如答案图，连接 OD,

∵OD 是⊙O 的半径，⊙O 与 BC 相切于点 D,

∴$OD\perp BC$,

∵$\triangle ABC$ 是直角三角形，$\angle B=90°$，

∴$AB\perp BC$,

∴$AB\parallel OD$,

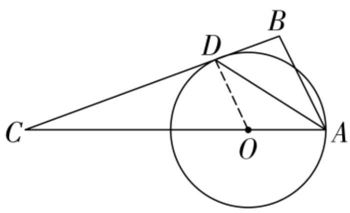
∴$\angle DOC=\angle BAC$,

∵$\angle DOC=2\angle DAC$,

∴$\angle BAC=2\angle DAC$,

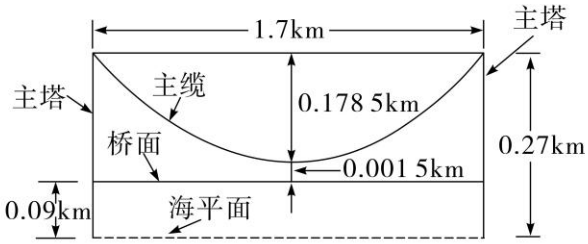
∴$\angle DAC=\angle DAB$,

∴AD 平分$\angle BAC$.



答案图

18. 如图，某跨海钢箱梁悬索桥的主跨长 1.7 km，主塔高 0.27 km，主缆可视为抛物线，主缆垂度 0.178 5 km，主缆最低处距离桥面 0.001 5 km，桥面距离海平面约 0.09 km.请在示意图中建立合适的平面直角坐标系，并求该抛物线的表达式.



18. 解：如答案图，∵主缆可视为抛物线，

∴以主缆的最低点为原点建立平面直角坐标系，

设抛物线的表达式为 $y=ax^2(a\neq0)$,

∵跨海钢箱梁悬索桥的主跨长 1.7 km，主塔高 0.27 km，主缆最低处距离桥面 0.0015km，桥面距离海平面约 0.09 km，

根据抛物线的对称性，

可得 1.7÷2=0.85，

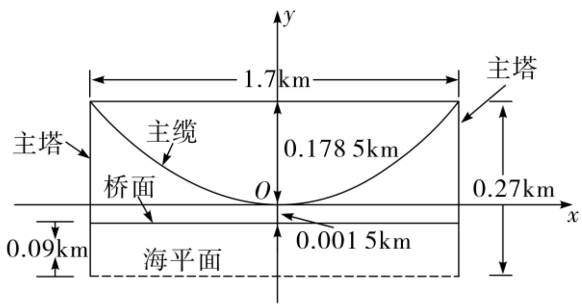
∵主缆垂度为 0.178 5 km，

∴函数图象过点（0.85,0.178 5），

将（0.85,0.178 5）代入表达式 $y=ax^2(a\neq0)$，

∴$0.85^2a=0.178\ 5$,解得 $a=\frac{21}{85}$,

∴抛物线的表达式为 $y=\frac{21}{85}x^2$（$-0.85\leq x\leq0.85$）.（答案不唯一）



答案图

四、解答题(二)（本大题共 3 小题，每小题 9 分，共 27 分）

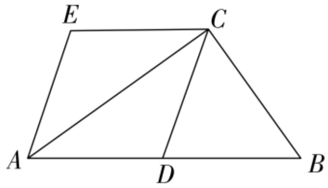
19. 如图, CD 是 Rt△ABC 斜边 AB 上的中线,过点 A, C 分别作 $AE\parallel DC$，$CE\parallel AB$，AE 与 CE 相交于点 E.现有以下命题：

命题 1：若连接 BE 交 CA 于点 F，则 $S_{\triangle CFB}=2S_{\triangle CEF}$.

命题 2：若连接 ED，则 $ED\perp AC$.

命题 3：若连接 ED，则 $ED=BC$.

任选两个命题，先判断真假，再证明或举反例.



19. 解： 命题 1:真命题，

证明：如答案图①，$\because AE\parallel DC$，$CE\parallel AB$，

$\therefore$四边形 $ADCE$ 是平行四边形，

$\therefore EC=AD$，

$\because CD$ 是 Rt$\triangle ABC$ 斜边 AB 上的中线，

$\therefore AD=DB$，

$\because CE\parallel AB$,

$\therefore\triangle EFC\backsim\triangle BFA$，

$\therefore \frac{EF}{BF}=\frac{EC}{BA}=\frac{EC}{BD+AD}=\frac{1}{2}$,

$\therefore \frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle CFB}}=\frac{EF}{BF}=\frac{1}{2}$，即 $S_{\triangle CFB}=2S_{\triangle CEF}$;

命题 2:真命题，

证明：如答案图②，$\because AE\parallel DC$，$CE\parallel AB$，

$\therefore$四边形 $ADCE$ 是平行四边形，

$\because CD$ 是 Rt$\triangle ABC$ 斜边 AB 上的中线，

$\therefore AD=CD$，

$\therefore$四边形 $ADCE$ 是菱形，

$\therefore ED\perp AC$.

或命题 3:真命题，

证明：如答案图②，$\because AE\parallel DC$，$CE\parallel AB$，

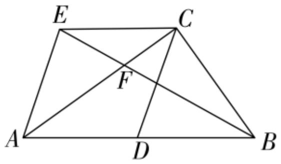
$\therefore$四边形 $ADCE$ 是平行四边形，

$\therefore EC=AD$，$\because CD$ 是 Rt$\triangle ABC$ 斜边 AB 上的中线，

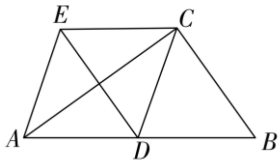
$\therefore AD=DB$，$\therefore EC=DB$，

$\therefore$四边形 $ECBD$ 是平行四边形，

$\therefore ED=BC$（任选两个命题作答即可）.

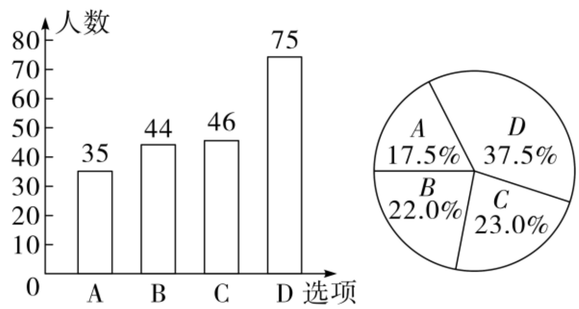


答案图①



答案图②

20. 2025 年 2 月，广东省教育厅发布《关于保障中小学生每天综合体育活动时间不低于两小时的通知》.某校为更好地落实文件精神并了解学生参加体育活动的情况，随机抽取部分学生进行问卷调查，并对所得数据进行处理.部分信息如下：

<table>
<tr><td>调查问卷</td><td colspan="5">整理与描述</td></tr>
<tr><td>1. 你每天参加体育活动(含体育课）的时间(单位：小时)(　　)(单选)
A. $0.5\le x<1$ B. $1\le x<1.5$
C. $1.5\le x<2$ D. $x\ge 2$</td><td colspan="5">每天参加体育活动(含体育课)的时间统计图

</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2. 随着体育活动时间的延长，学校拟增设体育活动项目，你希望增设的活动项目有(　　)(可多选)
E. 球类 F. 田径类
G. 体操类 H. 水上类</td><td colspan="5">希望增设的活动项目统计表</td></tr>
<tr><td>活动项目</td><td>球类</td><td>田径类</td><td>体操类</td><td>水上类</td></tr>
<tr><td>百分比</td><td>72%</td><td>23%</td><td>40%</td><td>46%</td></tr>
</table>

根据以上信息，解答下列问题：

(1)求参与这次问卷调查的学生人数;

(2)估计该校 1 000 名学生中每天参加体育活动时间不低于两小时的学生人数;

(3)基于上述两项调查的数据，提炼出一条信息，并向学校提出相应的建议.

20. 解：（1）$\frac{44}{22\%}$=200 人，

∴参与这次调查问卷的学生有 200 人；

（2）1 000×37.5%=375 人，

∴估计该校 1 000 名学生中每天参加体育活动时间不低于两小时的学生有 375 人；

（3）学生中希望增设球类运动的占比达到了 72%，人数最多，建议学校增设球类运动.（答案不唯一）

21. 综合与实践

【阅读材料】

如图①，在锐角△ABC 中，$\angle A,\angle B,\angle C$ 的对边长分别为 a，b，c，则有 $\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}=\frac{c}{sinC}$.这是解三角形的重要结论，可用于解决实际问题.

【问题提出】

万绿湖是广东省重要的生态屏障和饮用水水源地.某综合与实践小组要绘制一幅万绿湖局部平面示意图，现需要知道湖中 A，B 两岛间的实际距离.由于地形原因，无法利用测距仪直接测量，该小组对这一问题进行了探究.

【方案设计】

工具：测角仪、测距仪、无人机(只能测角度、水平面高度).

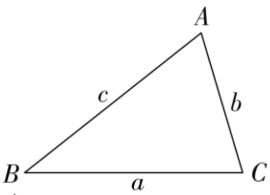
测量过程：

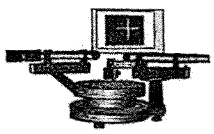
步骤 1：如图②，在空旷地找一点 C;

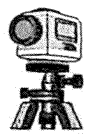
步骤 2：利用无人机多次测量并取平均值测得 $\angle A\approx 43°,\angle B\approx 51°$;

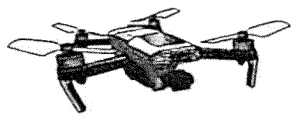
步骤 3：利用测距仪多次测量并取平均值测得 $BC\approx 341$ m,$AC\approx 388.5$ m.

【问题解决】

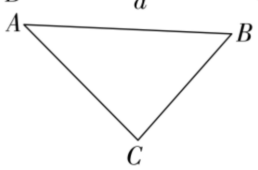








测角仪 测距仪 无人机



图

①

图②

(1)请你利用【阅读材料】中的结论计算 A，B 两岛间的距离;

(参考数据：$\sin 43°\approx 0.682,\sin 51°\approx 0.777,\sin 86°\approx 0.998$)

【评价反思】

(2)设计其他方案计算 A，B 两岛间的距离.要求：选用【方案设计】中的工具，写出你的方案和所用的数学知识.

21. 解：（1）在△ABC 中，$\angle C=180°-\angle A-\angle B=86°$，

由题意得 $\frac{BC}{\sin 43°}=\frac{AB}{\sin 86°}$，即 $\frac{341}{0.682}=\frac{AB}{0.998}$，

解得 $AB=499$ m；

（2）**解法一：**如答案图①，利用测角仪与无人机在南岸确定一点 D，使$\angle ADB=90°$，利用测距仪多次测量并取平均值得出 AD,BD 的长度，在 Rt△ABD 中利用勾股定理得到 AB 的长度，即得出了 A,B 两岛间的距离.

数学知识：勾股定理 $AB=\sqrt{AD^2+BD^2}$.

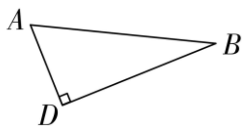
解法二：方案：如答案图②，在空旷地找一点 C，利用测距仪多次测量 AC，BC 并取平均值，在 AC 延长线找一点 E，使得 $CE=AC$，在 BC 延长线上找一点 D，使得 $CD=BC$，再利用测距仪多次测量 ED 并取平均值，ED 的长即为 AB 的长.

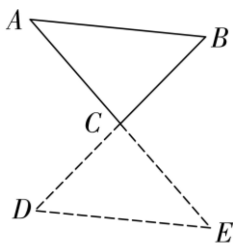
数学知识：全等三角形对应边相等,

$\because CE=AC,CD=BC,\angle ACB=\angle ECD$，

$\therefore$△$ABC\cong$△EDC（SAS），

$\therefore AB=ED$.





答案图①　　答案图②

五、解答题(三)（本大题共 2 小题，第 22 小题 13 分，第 23 小题 14 分，共 27 分）

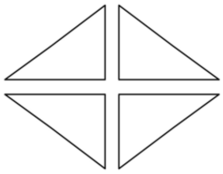
22.《九章算术》是世界上较早给出勾股数公式的著作，掌握确定勾股数组的方法对研究直角三角形具有重要意义.若直角三角形的三边长 a，b，c 都是正整数，则 a，b，c 为一组“勾股数”.下表中的每一组数都是勾股数.

3,4,5	7,24,25	11,60,61	15,112,113	19,180,181
4,3,5	8,15,17	12,35,37	16,63,65	20,21,29
5,12,13	9,12,15	13,84,85	17,144,145	21,28,35
6,8,10	10,_____,26	14,48,50	18,80,82	22,120,122

(1)请补全上表中的勾股数;

(2)根据上表中数据规律，用含字母(均为正整数)的代数式分别表示 a，b，c，使该组代数式能表示上表中所有的勾股数，并证明;

(3)某校计划在一块绿地上种花，使之构成如图所示的图案，该图案是由四个全等的直角三角形组成.种花要求：仅在三角形边上种花，每个三角形顶点处都种一株花，各边上相邻两株花之间的距离均为 1 m.如果每个三角形最短边都种 21 株花，那么这块绿地最少需要种植多少株花?



22. 解：（1）

3， 4，5	7， 24， 25	11，60，61	15， 112，113	19， 180，181
4， 3，5	8，15， 17	12， 35， 37	16， 63，65	20，21，29
5，12，13	9， 12，15	13，84， 85	17，144，145	21， 28，35
6， 8，10	10，_24_，26	14， 48， 50	18，80， 82	22， 120，122

（2）**解法一：**①根据表中数据(3， 4， 5)，(4， 3， 5)，(5， 12， 13)，(7， 24， 25)，(8， 15， 17)，(11， 60， 61)，(12， 35， 37)，(13， 84， 85)，(15， 112， 113)，(16， 63， 65)，(17， 144， 145)，(19， 180， 181)，(20， 21， 29)的规律能用含字母 n， m ($m>n$， 且 n， m 均为正整数)的代数式表示三角形的三边.设为 $a=m^2-n^2$，$b=2mn$，$c=m^2+n^2$.

证明：$\because$ $a^2=(m^2-n^2)^2=m^4-2m^2n^2+n^4$， $b^2=(2mn)^2=4m^2n^2$，

$\therefore a^2+b^2=m^4+2m^2n^2+n^4$，

$\because c^2=(m^2+n^2)^2=m^4+2m^2n^2+n^4$，

$\therefore a^2+b^2=c^2$.

根据勾股定理的逆定理，得 $a=m^2-n^2$， $b=2mn$，$c=m^2+n^2$能够成为直角三角形的三边长.

②根据表中数据可知(6， 8， 10)，(9， 12， 15)，(21， 28， 35)分别是(3， 4， 5)的 2 倍， 3 倍， 7 倍；(10， 24， 26)，(14， 48， 50)，(18， 80， 82)，(22， 120， 122)， 分别是(5， 12， 13)，(7， 24，25)，(9， 40， 41)，(11， 60， 61)的 2 倍， 经验算(9， 40， 41)满足 m^2-n^2，$2mn$， m^2+n^2.

因此，表中数据能用含字母 n，m，k ($m>n$，且 n，m，k 均为正整数)的代数式表示三角形的三边.设为 $a=(m^2-n^2)k$，$b=2mnk$，$c=(m^2+n^2)k$.

证明： $\because a^2=[(m^2-n^2)k]^2=m^4k^2-2m^2n^2k^2+n^4k^2$，$b^2=(2mnk)^2=4m^2n^2k^2$，

$\therefore a^2+b^2=m^4k^2+2m^2n^2k^2+n^4k^2$，

$\because c^2=[(m^2+n^2)k\ \ ]^2=m^4k^2+2m^2n^2k^2+n^4k^2$，

$\therefore a^2+b^2=c^2$.

根据勾股定理的逆定理，得 $(m^2-n^2)k$，$2mnk$，$(m^2+n^2)k$ 能够成为直角三角形的三边长，$\therefore$利用 $a=(m^2-n^2)k$，$b=2mnk$，$c=(m^2+n^2)k$ 能够表示出表中所有勾股数组；

解法二： ①根据表中数据(3，4，5)，(5，12，13)，(7，24，25)等，设 $a=2n+1$，$b=2n^2+2n$，$c=2n^2+2n+1$，(n 为正整数).

证明： $\because a^2=(2n+1)^2=4n^2+4n+1$，$b^2=(2n^2+2n)^2=4n^4+8n^3+4n^2$，

$\therefore a^2+b^2=4n^4+8n^3+8n^2+4n+1$，

$\because c^2=(2n^2+2n+1)^2=4n^4+8n^3+8n^2+4n+1$，

$\therefore a^2+b^2=c^2$.

根据勾股定理的逆定理，得 $a=2n+1$，$b=2n^2+2n$，$c=2n^2+2n+1$ 能够成为直角三角形的三边长且是勾股数.

②根据表中数据(4，3，5)，(8，15，17)，(12，35，37)等，设 $a=2n$，$b=n^2-1$，$c=n^2+1$，(n 为大于 1 的正整数).

证明： $\because a^2=4n^2$，$b^2=(n^2-1)^2=n^4-2n^2+1$，

$\therefore a^2+b^2=n^4+2n^2+1$，

$\because c^2=n^4+2n^2+1$，

$\therefore a^2+b^2=c^2$.

根据勾股定理的逆定理，得 $a=2n$，$b=n^2-1$，$c=n^2+1$ 能够成为直角三角形的三边长且是勾股数.

③根据表中规律(6，8，10)，(9，12，15)，(21，28，35)等分别是(3，4，5)的 2 倍，3 倍，7 倍.设 a，b，c 是勾股数，同时扩大 k 倍(k 是正整数)，三角形的三边可表示为 ak，bk，ck.

证明： $\because(ak)^2=a^2k^2$，$(bk)^2=b^2k^2$，$(ck)^2=c^2k^2$，$a^2+b^2=c^2$，

$\therefore(ak)^2+(bk)^2=(a^2+b^2)k^2=c^2k^2=(ck)^2$.

根据勾股定理的逆定理，得 ak，bk，ck 能够成为直角三角形的三边长且是勾股数；

（3）**解：** 依题意设 $a=20$，且直角三角形三边长均为正整数. 由勾股定理可得 $a^2+b^2=c^2$，则有 $c^2-b^2=a^2$，即$(c+b)(c-b)=400$.下面分 4 种情况讨论.

① $\begin{cases} c+b=40 \\ c-b=10 \end{cases}$,

解得 c=25， b=15.

∵a<b，

∴b=15 (舍去).

② $\begin{cases} c+b=100 \\ c-b=4 \end{cases}$,

解得 c=52， b=48.

所需花为 4×120=480 (株) .

③ $\begin{cases} c+b=200 \\ c-b=2 \end{cases}$,

解得 c=101， b=99.

所需花为 4×220=880 (株).

④ $\begin{cases} c+b=50 \\ c-b=8 \end{cases}$,

解得 c=29， b=21.

所需花为 4×70=280 (株).

答：这块绿地最少需要种植 280 株花.

23. 定义：把某线段一分为二的点，当整体线段比大线段等于大线段比小线段时，则称此线段被分为中外比，这个点称为中外比点.

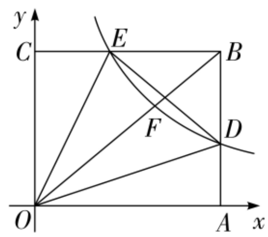
(1)如图①，点 P 是线段 MN 的中外比点， $MP>PN,MN=2$,求 PN 的长;

(2)如图②，用无刻度的直尺和圆规求作一点 C 把线段 AB 分为中外比;(保留作图痕迹，不写作法)

(3)如图③，动点 B 在第一象限内，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k>0,x>0$)的图象分别与矩形 $OABC$ 的边 AB，BC 相交于点 D， E，与对角线 OB 相交于点 F.当 $\triangle ODE$ 是等腰直角三角形时，探究点 D，E，F 是否分别为 AB,BC,OB 的中外比点,并证明.

图①

图②



图③

23. 解:（1）由题意得， $\frac{MN}{MP}=\frac{MP}{PN}$,

设 $PN=x$，得 $\frac{2}{2-x}=\frac{2-x}{x}$，

解得 $x=3-\sqrt{5}$(不符合条件的值已舍去），

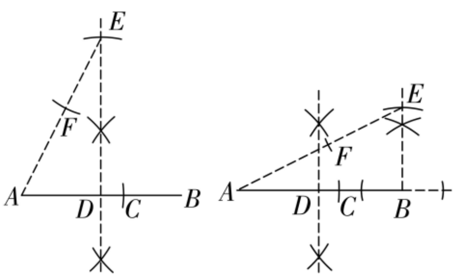
$\therefore PN$ 的长为 $3-\sqrt{5}$；

（2）**解法一**：如答案图①，点 C 即为所求；（作法不唯一）

【作法提示】作 AB 中垂线交 AB 于点 D，在中垂线上截取 DE，使 $DE=AB$，连接 AE，则 $AE=\sqrt{5}AD$，在 AE 上截取 EF，使 $EF=AD$，则 $AF=(\sqrt{5}-1)AD$，在 AB 上截取 AC，使 $AC=AF$，则 $\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

解法二：如答案图②，点 C 即为所求.

【作法提示】作 AB 中垂线交 AB 于点 D，过点 B 作 AB 的垂线，在垂线上截取 BE，使 $BE=BD$，连接 AE，则 $AE=\sqrt{5}AD$，在 AE 上截取 EF，使 $EF=BD$，则 $AF=(\sqrt{5}-1)BD$，在 AB 上截取 AC，使 $AC=AF$，则 $\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.



答案图①　　答案图①

(3)D,E,F 分别为 AB，BC，OB 的中外比点.

证明：易知$\angle DOE<90°$,∴分情况讨论，

①若$\angle OED=90°$,

设 $CE=a,OC=b$,易证$\triangle OCE\cong\triangle EBD$,

$\therefore EB=OC=b,BD=CE=a$,

$\therefore E(a,b),D(b+a,b-a)$，

由 $y=\frac{k}{x}$知,

$\therefore b^2-a^2=ab$,

$\therefore b^2=a^2+ab$,

$\therefore b^2=a(a+b)$，

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{a+b}{b}$,

$\therefore \frac{BE}{CE}=\frac{BC}{BE}$,

$\therefore E$ 是 BC 的中外比点.

又由 $b^2-a^2=ab$,有 $a^2=b(b-a)$,

$\therefore \frac{a}{b-a}=\frac{b}{a}$,

$\therefore \frac{BD}{AD}=\frac{AB}{BD}$,

$\therefore D$ 是 AB 的中外比点.

易求直线 OB 的表达式为 $y=\frac{b}{a+b}x$,联立 $\begin{cases} y=\frac{b}{a+b}x \\ y=\frac{k}{x} \end{cases}$,

得 $x_F=\sqrt{\frac{a+b}{b}\cdot k}=\sqrt{(a+b)\cdot a}$,

由 $b^2-a^2=ab$,有 $b=\sqrt{(a+b)\cdot a}$,

$\therefore a=a+b-\sqrt{(a+b)\cdot a}$,

$\therefore (a+b)\cdot a=(a+b)(a+b-\sqrt{(a+b)\cdot a})$,

$\therefore \frac{a+b}{\sqrt{(a+b)\cdot a}}=\frac{\sqrt{(a+b)\cdot a}}{a+b-\sqrt{(a+b)\cdot a}}$,

$\therefore \frac{x_A}{x_F}=\frac{x_F}{x_A-x_F}$,

$\therefore \frac{OB}{OF}=\frac{OF}{BF}$,

$\therefore F$ 是 OB 的中外比点;

②若$\angle ODE=90°$,

设 $OA=c,AD=d$,易证$\triangle OAD\cong\triangle DBE$,

$\therefore BD=OA=c,BE=AD=d$,

$\therefore D(c,d),E(c-d,c+d)$,

由 $y=\frac{k}{x}$知

$\therefore c^2-d^2=cd$,同理可得,D,E,F 分别是 AB,BC,OB 的中外比点,

综上,当$\triangle ODE$ 为等腰直角三角形时,D,E,F 分别是 AB,BC,OB 的中外比点.