2024年广东省初中学业水平考试·数学

学校：________________ 班级：________________ 姓名：________________

全卷总分:120分　　考试时间:120分钟

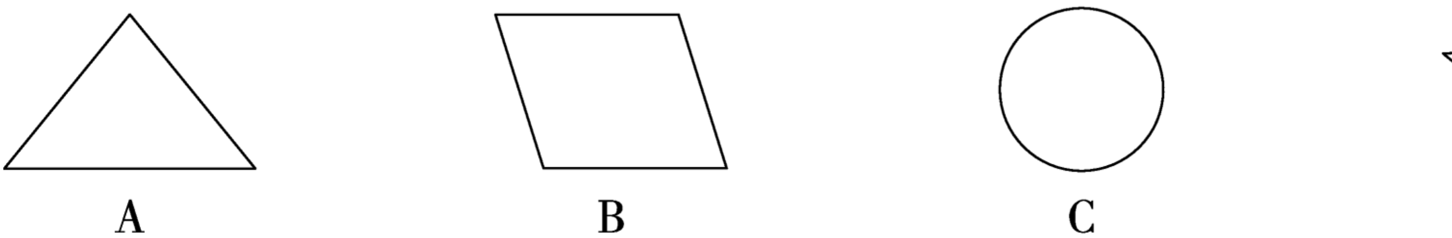
一、选择题(本大题共10小题，每小题3分，共30分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．)

1. 计算$-5+3$的结果是(　　)

A.-2　　B.-8　　C.2　　D.8

1. A

2. 下列几何图形中，既是中心对称图形也是轴对称图形的是(　　)



2. C

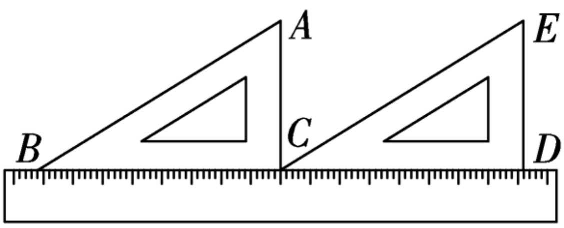
3. 2024年6月6日，嫦娥六号在距离地球约384 000千米外上演“太空牵手”，完成月球轨道的交会对接．数据384 000用科学记数法表示为(　　)

A. 3.84×10^4　　B. 3.84×10^5

C. 3.84×10^6　　D. 38.4×10^5

3. B

4. 如图，一把直尺、两个含30°的三角尺拼接在一起，则$\angle ACE$的度数为(　　)



A. 120°　　B. 90°　　C. 60°　　D. 30°

4. C

【解析】$\angle ACE=180°-90°-30°=60°$.

5. 下列计算正确的是(　　)

A.$a^2\cdot a^5=a^{10}$　　B.$a^8\div a^2=a^4$

C. $-2a+5a=7a$ D. $(a^2)^5=a^{10}$

5. D

【解析】逐项分析如下：

选项	逐项分析	正误
A	$a^2\cdot a^5=a^{2+5}=a^7\neq a^{10}$	×
B	$a^8\div a^2=a^{8-2}=a^6\neq a^4$	×
C	$-2a+5a=3a\neq 7a$	×
D	$(a^2)^5=a^{2\times 5}=a^{10}$	√

6. 长江是中华民族的母亲河，长江流域孕育出藏羌文化、巴蜀文化、荆楚文化、吴越文化等区域文化．若从上述四种区域文化中随机选一种文化开展专题学习，则选中“巴蜀文化”的概率是(　　)

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{4}$

6. A

7. 完全相同的 4 个正方形面积之和是 100，则正方形的边长是(　　)

A. 2 B. 5 C. 10 D. 20

7. B

【解析】由题意得，每个正方形的面积为 $100\div 4=25$，∴正方形的边长为 5.

8. 若点$(0，y_1)$，$(1，y_2)$，$(2，y_3)$都在二次函数 $y=x^2$ 的图象上，则(　　)

A. $y_3>y_2>y_1$ B. $y_2>y_1>y_3$ C. $y_1>y_3>y_2$ D. $y_3>y_1>y_2$

8. A

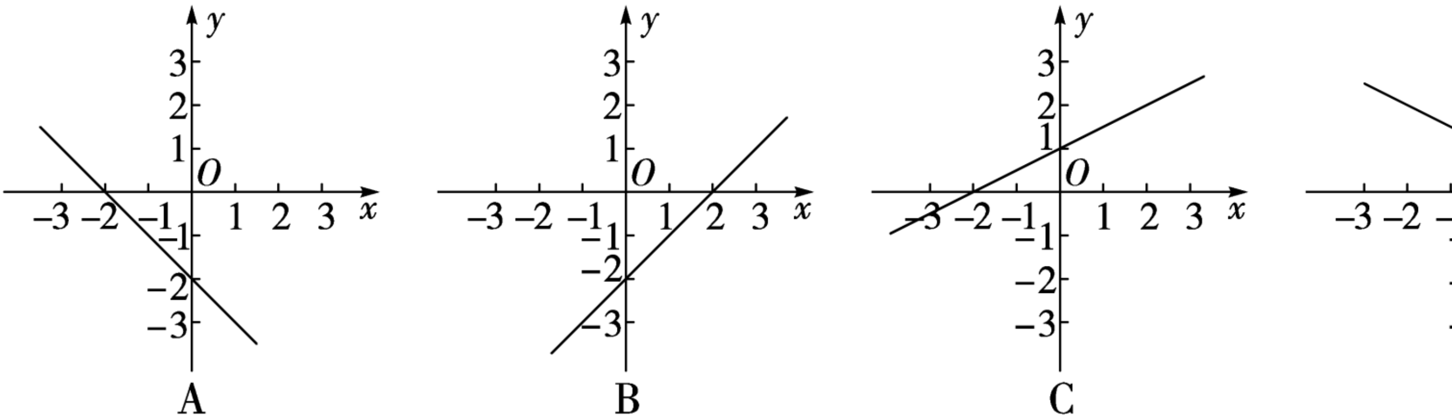
【解析】∵二次函数的解析式为 $y=x^2$，∴该二次函数的图象开口向上，对称轴为 y 轴，在对称轴右侧，y 随 x 的增大而增大，∵$0<1<2$，∴$y_1<y_2<y_3$.

9. 方程 $\frac{2}{x-3}=\frac{3}{x}$的解是(　　)

A. $x=-3$ B. $x=-9$ C. $x=3$ D. $x=9$

9. D

10. 已知不等式 $kx+b<0$ 的解集是 $x<2$，则一次函数 $y=kx+b$ 的图象大致是(　　)



10. B

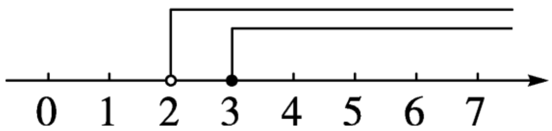
【解析】由题意得，$x<2$ 时，一次函数的图象应在 x 轴下方，故 B 符合题意．

二、填空题(本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分．)

11. 数据 5，2，5，4，3 的众数是________．

11. 5

12. 关于 x 的不等式组中，两个不等式的解集如图所示，则这个不等式组的解集是________．



12. $x\geq 3$

13. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2+2x+c=0$ 有两个相等的实数根，则 $c=$________．

13. 1

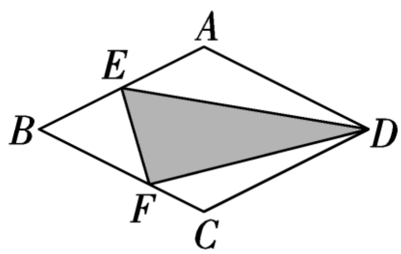
【解析】∵关于 x 的一元二次方程 $x^2+2x+c=0$ 有两个相等的实数根，∴$\Delta=2^2-4c=0$，解得 $c=1$．

14. 计算：$\frac{a}{a-3}-\frac{3}{a-3}=$________．

14. 1

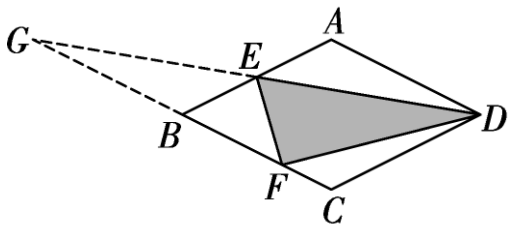
【解析】原式$=\frac{a-3}{a-3}=1$．

15. 如图，菱形 $ABCD$ 的面积为 24，E 是 AB 的中点，F 是 BC 上的动点．若$\triangle BEF$ 的面积为 4，则图中阴影部分的面积为________．



15. 10

【解析】如解图，延长 DE，CB 交于点 G，∵四边形 $ABCD$ 为菱形，∴$AD\parallel BG$，∴∠GBE＝∠DAE，∵E 是 AB 中点，∴$BE=AE$，∵$\angle GEB=\angle DEA$，∴$\triangle AED\cong\triangle BEG$(ASA)，∴$GE=DE$，∴$E$ 为 DG 中点，∴$S_{\triangle DEF}=S_{\triangle FGE}=S_{\triangle BEF}+S_{\triangle BEG}=4+S_{\triangle AED}=4+24\times\frac{1}{4}=10$.



解图

三、解答题(一)(本大题共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分．)

16. 计算：$2^0\times|-\frac{1}{3}|+\sqrt{4}-3^{-1}$.

16. 解：原式$=1\times\frac{1}{3}+2-\frac{1}{3}$

$=2$

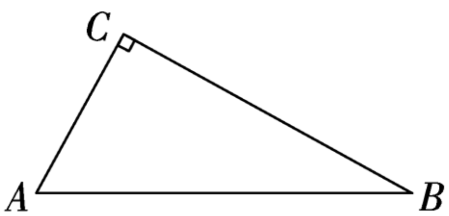
17. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$.

(1)实践与操作：用尺规作图法作∠A 的平分线 AD 交 BC 于点 D；

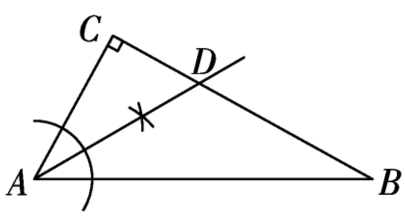
(保留作图痕迹，不要求写作法)

(2)应用与证明：在(1)的条件下，以点 D 为圆心，DC 长为半径作⊙D.

求证：AB 与⊙D 相切.



17. (1)**解：**如解图①，点 D 即为所求；



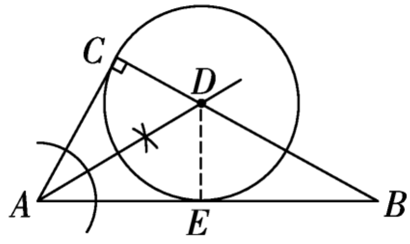
解图①

(2)**证明：**如解图②，以点 D 为圆心，DC 长为半径画圆，过点 D 作 $DE\perp AB$ 于点 E，

∵AD 平分∠BAC，$\angle C=90°$，$DE\perp AB$，∴$DC=DE$，

∵DC 为⊙D 的半径，∴DE 为⊙D 的半径，

∵$DE \perp AB$，∴AB 与⊙D 相切．



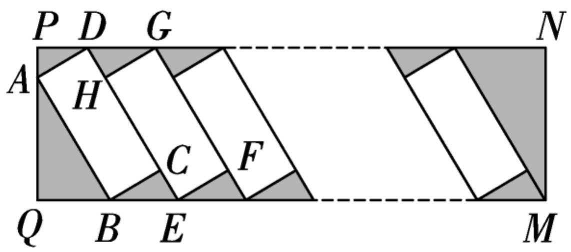
解图②

18. 中国新能源汽车为全球应对气候变化和绿色低碳转型作出了巨大贡献．为满足新能源汽车的充电需求，某小区增设了充电站，如图是矩形 $PQMN$ 充电站的平面示意图，矩形 $ABCD$ 是其中一个停车位．经测量，$\angle ABQ=60°$，$AB=5.4$m，$CE=1.6$m，$GH \perp CD$，GH 是另一个车位的宽，所有车位的长宽相同，按图示并列划定．

根据以上信息回答下列问题：(结果精确到 0.1m，参考数据 $\sqrt{3}\approx1.73$)

(1)求 PQ 的长；

(2)该充电站有 20 个停车位，求 PN 的长．



18. 解：(1)由题意得$\angle Q=90°$，$\angle ABQ=60°$，$AB=5.4$ m，

∴在 Rt△ABQ 中，$\angle BAQ=30°$，$BQ=5.4\times\cos 60°=2.7$ m，$AQ=5.4\times\sin 60°=\frac{27\sqrt{3}}{10}$m，

∵四边形 $ABCD$ 为矩形，$CE=1.6$ m，

∴$\angle ABC=90°$，$\angle CBE=180°-\angle ABC-\angle ABQ=30°$，

在 Rt△CBE 中，$BC=1.6\div\tan 30°=\frac{8\sqrt{3}}{5}$m，$BE=1.6\div\sin 30°=3.2$ m，∴$BC=AD=\frac{8\sqrt{3}}{5}$ m，

同理可得，在 Rt△PAD 中，$\angle PAD=60°$，∴$PA=\frac{8\sqrt{3}}{5}\times\cos 60°=\frac{4\sqrt{3}}{5}$ m，

∴$PQ=PA+AQ=\frac{4\sqrt{3}}{5}+\frac{27\sqrt{3}}{10}=\frac{7\sqrt{3}}{2}\approx6.1$ m，

答：PQ 的长约为 6.1 m；

(2)∵充电站有 20 个停车位，∴$QM=QB+20BE$，

由(1)得，$QB=2.7$m，$BE=3.2$m，∴$QM=2.7+3.2\times20=66.7$m，

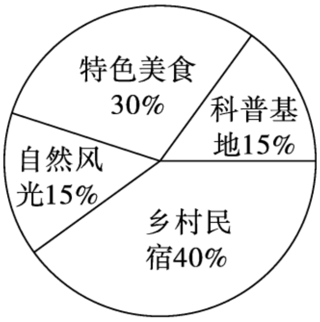
∵四边形 $PQMN$ 为矩形，∴$PN=QM=66.7$m，

答：PN 的长为 66.7m．

四、解答题(二)(本大题共 3 小题，每小题 9 分，共 27 分.)

19. 端午假期，王先生计划与家人一同前往景区游玩．为了选择一个最合适的景区，王先生对 A，B，C 三个景区进行了调查与评估．他依据特色美食、自然风光、乡村民宿及科普基地四个方面，为每个景区评分(10 分制)．三个景区的得分如下表所示：

景区	特色美食	自然风光	乡村民宿	科普基地
A	6	8	7	9
B	7	7	8	7
C	8	8	6	6



(1)若四项所占百分比如图所示，通过计算回答：王先生会选择哪个景区去游玩？

(2)如果王先生认为四项同等重要，通过计算回答：王先生将会选择哪个景区去游玩？

(3)如果你是王先生，请按你认为的各项“重要程度”设计四项得分的百分比，选择最合适的景区，并说明理由.

19. 解：(1)A 景区：$6\times30\%+8\times15\%+7\times40\%+9\times15\%=7.15$(分)，

B 景区：$7\times30\%+7\times15\%+8\times40\%+7\times15\%=7.4$(分)，

C 景区：$8\times30\%+8\times15\%+6\times40\%+6\times15\%=6.9$(分)，

$\because 7.4$ 分>7.15 分>6.9 分，$\therefore$王先生会选择 B 景区游玩；

(2)A 景区：$(6+8+7+9)\div4=7.5$(分)，

B 景区：$(7+7+8+7)\div4=7.25$(分)，

C 景区：$(8+8+6+6)\div4=7$(分)，

$\because 7.5$ 分>7.25 分>7 分，$\therefore$王先生将会选择 A 景区游玩；

(3)如果我是王先生，则认为各项“重要程度”为特色美食 40%，自然风光 40%，乡村民宿 10%，科普基地 10%，会选择 C 景区．理由：

A 景区：$6\times40\%+8\times40\%+7\times10\%+9\times10\%=7.2$(分)，

B 景区：$7\times40\%+7\times40\%+8\times10\%+7\times10\%=7.1$(分)，

C 景区：$8\times40\%+8\times40\%+6\times10\%+6\times10\%=7.6$(分)，

∵7.6 分＞7.2 分＞7.1 分，∴会选择 C 景区．(本题答案不唯一，合理即可)

20. 广东省全力实施“百县千镇万村高质量发展工程”，2023 年农产品进出口总额居全国首位，其中荔枝鲜果远销欧美．某果商以每吨 2 万元的价格收购早熟荔枝，销往国外．若按每吨 5 万元出售，平均每天可售出 100 吨．市场调查反映：如果每吨降价 1 万元，每天销售量相应增加 50 吨．该果商如何定价才能使每天的“利润”或“销售收入”最大？并求出其最大值．(题中“元”为人民币)

20. 解： 选择利润最大：

设该果商定价为每吨 x 万元，利润为 W 万元，

则销量为 $100+50(5-x)=(350-50x)$吨，∴$W=(x-2)(350-50x)=-50x^2+450x-700$，

∵$-50<0$，对称轴为直线 $x=-\dfrac{450}{2\times(-50)}=4.5$，

∴当 $x=4.5$ 时，W 最大，此时 $W=(4.5-2)\times(350-50\times4.5)=312.5$，

答：该果商定价为每吨 4.5 万元时利润最大，最大利润为 312.5 万元．

或选择销售收入最大：

设该果商定价为每吨 x 万元，销售收入为 y 万元，

则销量为 $100+50(5-x)=(350-50x)$吨，∴$y=x(350-50x)=-50x^2+350x$，

∵$-50<0$，对称轴为直线 $x=-\dfrac{350}{2\times(-50)}=3.5$，

∴当 $x=3.5$ 时，y 最大，此时 $y=3.5\times(350-50\times3.5)=612.5$，

答：该果商定价为每吨 3.5 万元时销售收入最大，最大销售收入为 612.5 万元．

21. 综合与实践

【主题】滤纸与漏斗

【素材】如图①所示：

①一张直径为 10cm 的圆形滤纸；

②一只漏斗口直径与母线均为 7cm 的圆锥形过滤漏斗．

【实践操作】

步骤 1：取一张滤纸；

步骤 2：按如图②所示步骤折叠好滤纸；

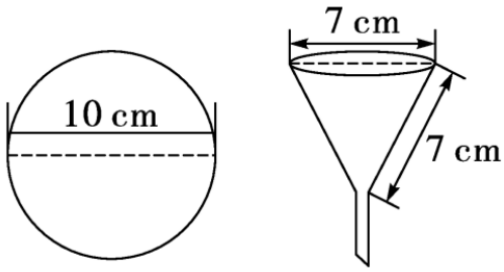
步骤 3：将其中一层撑开，围成圆锥形；

步骤 4：将围成圆锥形的滤纸放入如图①所示漏斗中．

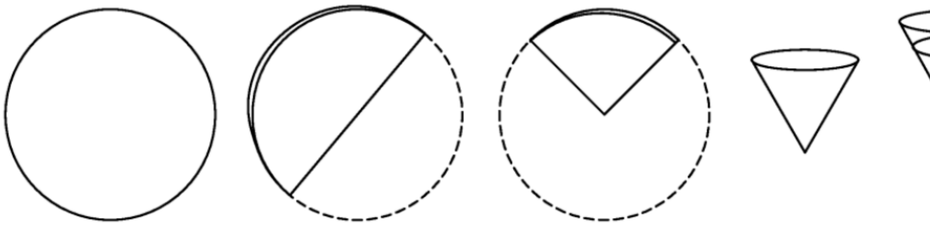
【实践探索】

(1)滤纸是否能紧贴此漏斗内壁(忽略漏斗管口处)？用你所学的数学知识说明.

(2)当滤纸紧贴漏斗内壁时，求滤纸围成圆锥形的体积.(结果保留 π)



图①



图②

21. 解：(1)能；

设圆锥滤纸底面周长为 C，半径为 r，母线为 l，

漏斗底面半径为 $R=\frac{7}{2}$cm，母线长 $L=7$cm，滤纸直径 $d=10$cm，

由题意得 $\frac{1}{2}\pi d=C=2\pi r$，$r=\frac{5}{2}$ cm，$l=\frac{d}{2}=5$cm，

$\therefore \frac{r}{l}=\frac{1}{2}$，又$\because \frac{R}{L}=\frac{\frac{7}{2}}{7}=\frac{1}{2}$，$\therefore \frac{r}{l}=\frac{R}{L}$，∴滤纸可紧贴漏斗内壁；

(2)设滤纸围成圆锥形的高为 h cm，由(1)可知 $h=\sqrt{l^2-r^2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm，

$\therefore V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\times\pi\times(\frac{5}{2})^2\times\frac{5\sqrt{3}}{2}=\frac{125\sqrt{3}\pi}{24}(\text{cm}^3)$.

22. 【知识技能】

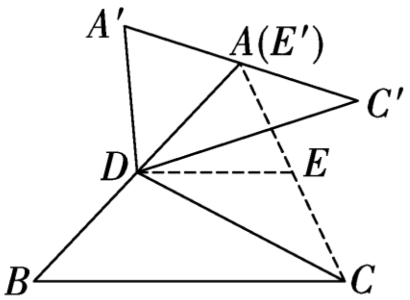
(1)如图①，在△ABC 中，DE 是△ABC 的中位线．连接 CD，将△ADC 绕点 D 按逆时针方向旋转，得到△$A'DC'$.当点 E 的对应点 E'与点 A 重合时，求证：$AB=BC$.

【数学理解】

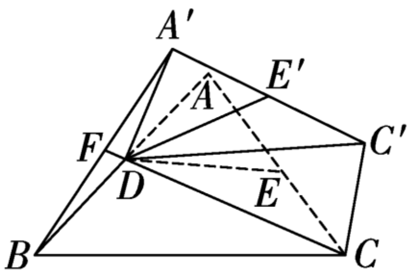
(2)如图②，在△ABC 中($AB<BC$)，DE 是△ABC 的中位线．连接 CD，将△ADC 绕点 D 按逆时针方向旋转，得到△$A'DC'$，连接 $A'B$，$C'C$，作△$A'BD$ 的中线 DF.求证：$2DF\cdot CD=BD\cdot CC'$.

【拓展探索】

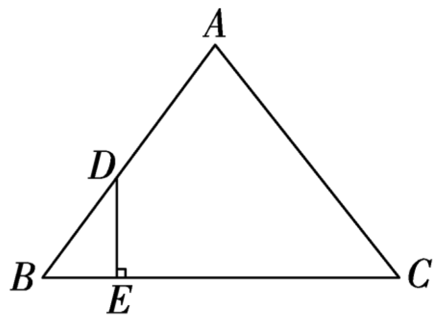
(3)如图③，在△ABC 中，$\tan B=\frac{4}{3}$，点 D 在 AB 上，$AD=\frac{32}{5}$.过点 D 作 $DE\perp BC$，垂足为 E，$BE=3$，$CE=\frac{32}{3}$.在四边形 $ADEC$ 内是否存在点 G，使得$\angle AGD+\angle CGE=180°$？若存在，请给出证明；若不存在，请说明理由.



图①



图②



图③

22. (1)**证明：**∵DE 为$\triangle ABC$ 的中位线，∴$DE=\frac{1}{2}BC$，$AD=\frac{1}{2}AB$，

由旋转性质得 $AD=DE$，∴$AB=BC$；

(2)**证明：**如解图①，连接 AA'，

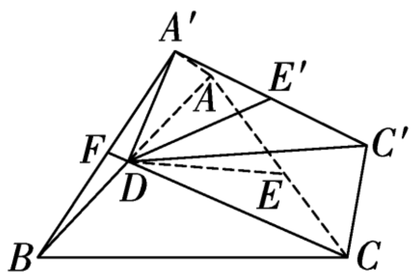
∵DE 为$\triangle ABC$ 的中位线，F 为 $A'B$ 的中点，

∴$DA=BD$，∴DF 是$\triangle ABA'$的中位线，∴$2DF=AA'$，

由旋转性质得$\triangle A'DC'\cong\triangle ADC$，$\angle A'DA=\angle C'DC$，

$A'D=AD$，$C'D=CD$，∴ $\frac{A'D}{C'D}=\frac{AD}{CD}$，∴$\triangle A'DA\backsim\triangle C'DC$，∴ $\frac{A'A}{C'C}=\frac{DA}{DC}$，

∴ $\frac{2DF}{C'C}=\frac{BD}{DC}$，∴$2DF\cdot CD=BD\cdot CC'$；



解图①

(3)**解：**存在点 G，使得$\angle AGD+\angle CGE=180°$，证明如下：

如解图②，过点 D 作 $DF\parallel BC$ 交 AC 于点 F，过点 C 作 $CH\perp AB$ 于点 H，DF 与 CH 交于点 G，连接 EG，AG，

∵$DE\perp BC$，∴$\angle DEB=90°$，

在 Rt$\triangle BDE$ 中，$\tan B=\frac{4}{3}$，$BE=3$，∴$DE=4$，$BD=5$，$\cos B=\frac{3}{5}$，$\sin B=\frac{4}{5}$，

在 Rt$\triangle BCH$ 中，$\cos B=\frac{BH}{BC}=\frac{3}{5}$，$BC=BE+CE=3+\frac{32}{3}=\frac{41}{3}$，

∴$BH=\frac{41}{5}$，∴$AH=AD+BD-BH=\frac{16}{5}$，∴$DH=AD-AH=\frac{16}{5}=AH$，

∵$CH\perp AD$，∴$\triangle ADG$ 为等腰三角形，∴$\angle AGH=\angle DGH$，

∵$DF\parallel BC$，∴$\angle ADG=\angle B$，$\angle EDG=90°$，

$\therefore \tan\angle ADG = \tan B = \frac{4}{3}$，$\cos\angle ADG = \cos B = \frac{3}{5}$，$\therefore \frac{HG}{DH} = \frac{4}{3}$，$\frac{DH}{DG} = \frac{3}{5}$，

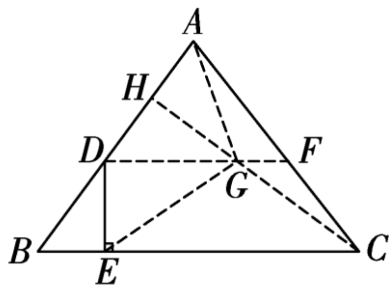
$\because DH = \frac{16}{5}$，$\therefore HG = \frac{64}{15}$，$DG = \frac{16}{3}$，(11 分)

$\because \frac{HG}{DH} = \frac{4}{3}$，$\frac{DG}{DE} = \frac{4}{3}$，$\therefore \frac{HG}{DH} = \frac{DG}{DE}$，

$\because \angle DHG = \angle EDG = 90°$，$\therefore \triangle DHG \backsim \triangle EDG$，$\therefore \angle DGH = \angle EGD$，

$\therefore \angle DGE = \angle AGH$，

$\because \angle AGC + \angle AGH = 180°$，$\therefore \angle AGC + \angle DGE = 180°$，$\therefore \angle AGD + \angle CGE = 180°$.



解图②

23.【问题背景】

如图①，在平面直角坐标系中，B，D 是直线 $y = ax(a > 0)$上第一象限内的两个动点($OD > OB$)，以线段 BD 为对角线作矩形 $ABCD$，$AD \parallel x$ 轴．反比例函数 $y = \frac{k}{x}$的图象经过点 A.

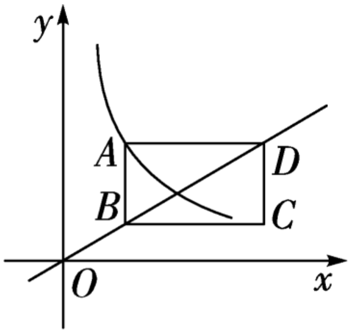
【构建联系】

(1)求证：函数 $y = \frac{k}{x}$的图象必经过点 C.

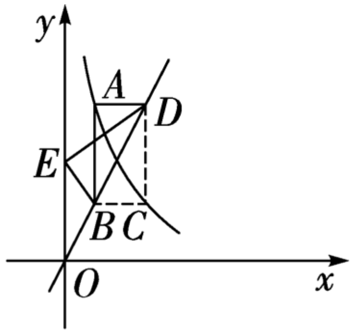
(2)如图②，把矩形 $ABCD$ 沿 BD 折叠，点 C 的对应点为 E.当点 E 落在 y 轴上，且点 B 的坐标为(1，2)时，求 k 的值．

【深入探究】

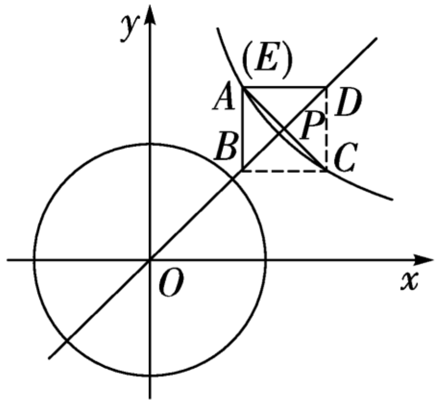
(3)如图③，把矩形 $ABCD$ 沿 BD 折叠，点 C 的对应点为 E.当点 E，A 重合时，连接 AC 交 BD 于点 P.以点 O 为圆心，AC 长为半径作⊙O.若 $OP = 3\sqrt{2}$，当⊙O 与△ABC 的边有交点时，求 k 的取值范围．



图①



图②



图③

23. (1)**证明：**设点 $B(m，am)$，点 $A(m，\frac{k}{m})$，

将 $y=\frac{k}{m}$代入 $y=ax$ 中，得 $\frac{k}{m}=ax$，$\therefore x=\frac{k}{am}$，$\therefore D(\frac{k}{am}，\frac{k}{m})$，$\therefore C(\frac{k}{am}，am)$，

$\because \frac{k}{am}\cdot am=k$，$\therefore$函数 $y=\frac{k}{x}$的图象必经过点 C；

(2)**解：**由 $B(1，2)$可得 $y=2x$.

$\because B(1，2)$，点 A，C 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$的图象上，

$\therefore A(1，k)$，$D(\frac{k}{2}，k)$，$C(\frac{k}{2}，2)$，$\therefore BC=\frac{k}{2}-1$，$CD=k-2$，

由折叠的性质知 $BE=BC=\frac{k}{2}-1$，$DE=CD=k-2$，$\angle BED=\angle BCD=90°$，

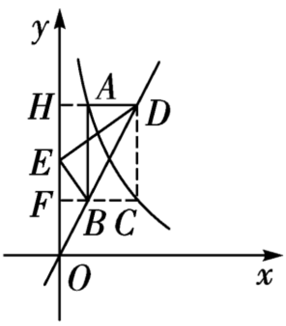
如解图①，延长 DA 交 y 轴于点 H，延长 CB 交 y 轴于点 F，则 $DH\perp y$ 轴，$BF\perp y$ 轴，

$\therefore\angle DHE=\angle EFB=90°$，$\angle HED+\angle BEF=90°$，$\angle HED+\angle EDH=90°$，

$\therefore\angle EDH=\angle BEF$，$\therefore\triangle EDH\backsim\triangle BEF$，$\therefore\frac{DH}{EF}=\frac{HE}{FB}=\frac{DE}{EB}=\frac{k-2}{\frac{k}{2}-1}=2$，

$\because BF=1$，$DH=\frac{k}{2}$，$\therefore HE=2$，$EF=\frac{k}{4}$，$\therefore HF=2+\frac{k}{4}$.

又$\because HF=CD$，$\therefore 2+\frac{k}{4}=k-2$，解得 $k=\frac{16}{3}$；



解图①

(3)**解：**$\because$把矩形沿 BD 折叠，点 C 对应点为 E，点 E，A 重合，

$\therefore AC\perp BD$，$\therefore$矩形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore BD$ 平分$\angle ABC$，

$\therefore BD$ 所在直线解析式为 $y=x$，

设圆的半径为 r，$\therefore BD=AC=r$，$\therefore BP=\frac{1}{2}r$，

①当⊙O 过点 B 时，$OP=OB+BP$，$\therefore r+\frac{1}{2}r=3\sqrt{2}$，$\therefore r=2\sqrt{2}$，$\therefore OB=2\sqrt{2}$，

此时点 $B(2，2)$，点 $P(3，3)$，$\therefore BP=\sqrt{2}$，$AB=2$，$\therefore A(2，4)$，

此时 $k=2\times4=8$；

②当⊙O 过点 A，C 时，如解图②，连接 OC，则 $OC=AC=r$，$PC=\frac{1}{2}r$，

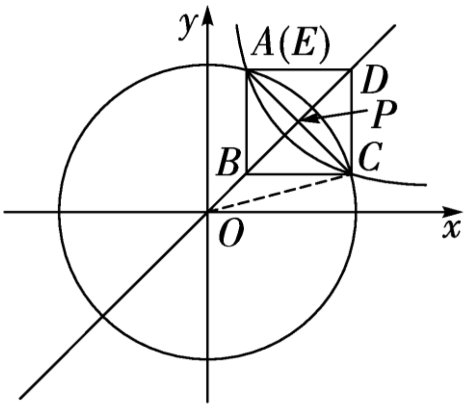
$\therefore\angle POC=30°$，$\therefore\cos\angle POC=\frac{OP}{OC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore OC=2\sqrt{6}$，$PC=AP=PB=\sqrt{6}$，$\therefore AB=2\sqrt{3}$，$OB=3\sqrt{2}-\sqrt{6}$，

此时点 $B(3-\sqrt{3}，3-\sqrt{3})$，$\therefore A(3-\sqrt{3}，3+\sqrt{3})$，

此时 $k=(3-\sqrt{3})\times(3+\sqrt{3})=6$；

综上所述，当⊙O 与△ABC 的边有交点时，k 的取值范围为 $6\le k\le8$.



解图②