2023年广东省初中学业水平考试•数学

学校：_______________ 班级：_______________ 姓名：_______________

全卷总分：60 分　　考试时间：60 分钟

一、选择题(本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1. 负数的概念最早出现在我国古代著名的数学专著《九章算术》中．如果把收入 5 元记作＋5 元，那么支出 5 元记作(　　)

A. －5 元　　B. 0 元　　C. ＋5 元　　D. ＋10 元

1. A

【解析】解： 把收入 5 元记作+5 元，根据收入和支出是一对具有相反意义的量，支出 5 元就记作－5 元．

2. 下列出版社的商标图案中，是轴对称图形的为(　　)


A


B


C

2. A

【解析】解： 选项 B，C，D 中的图形都不能确定一条直线，使图形沿这条直线对折，直线两旁的部分能够完全重合，不是轴对称图形，选项 A 中的图形沿某条直线对折后两部分能完全重合，是轴对称图形，

3. 2023 年 5 月 28 日，我国自主研发的 C919 国产大飞机商业首航取得圆满成功．C919 可储存约 186000 升燃油，将数据 186000 用科学记数法表示为(　　)

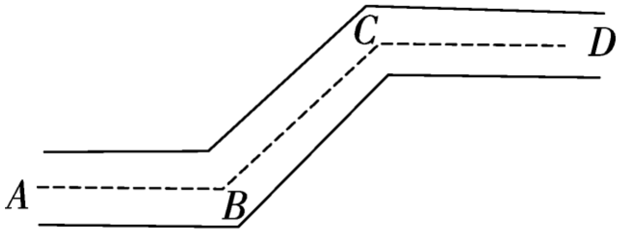
A. 0.186×10^5　　B. 1.86×10^5

C. 18.6×10^4　　D. 186×10^3

3. B

【解析】解： 将 186000 用科学记数法表示为：1.86×10^5．

4. 如图，街道 AB 与 CD 平行，拐角 $\angle ABC=137°$，则拐角 $\angle BCD=$(　　)



A. 43°　　　B. 53°　　　C. 107°　　　D. 137°

4. D

【解析】解：∵$AB\parallel CD$，∴$\angle ABC=\angle BCD=137°$.

5. 计算 $\frac{3}{a}+\frac{2}{a}$的结果为(　　)

A. $\frac{1}{a}$

B. $\frac{6}{a^2}$

C. $\frac{5}{a}$

D. $\frac{6}{a}$

5. C

【解析】解：$\frac{3}{a}+\frac{2}{a}=\frac{3+2}{a}=\frac{5}{a}$.

6. 我国著名数学家华罗庚曾为普及优选法作出重要贡献．优选法中有一种 0.618 法应用了(　　)

A. 黄金分割数　　　B. 平均数　　　C. 众数　　　D. 中位数

6. A

【解析】解：我国著名数学家华罗庚曾为普及优选法作出重要贡献．优选法中有一种 0.618 法应用了黄金分割数.

7. 某学校开设了劳动教育课程．小明从感兴趣的“种植”“烹饪”“陶艺”“木工”4 门课程中随机选择一门学习，每门课程被选中的可能性相等．小明恰好选中“烹饪”的概率为(　　)

A. $\frac{1}{8}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{2}$

7. C

【解析】解：∵共有“种植”“烹饪”“陶艺”“木工”4 门兴趣课程，∴小明恰好选中“烹饪”的概率为$\frac{1}{4}$.

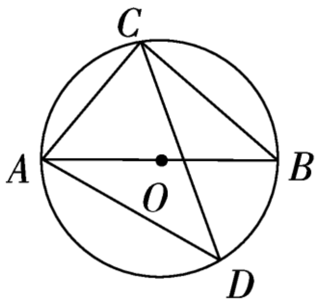
8. 一元一次不等式组 $\begin{cases} x-2>1, \\ x<4 \end{cases}$ 的解集为(　　)

A. $-1<x<4$　　　B. $x<4$　　　C. $x<3$　　　D. $3<x<4$

8. D

【解析】令 $\begin{cases} x-2>1 ① \\ x<4 ② \end{cases}$，解不等式①得 $x>3$，∴该不等式组的解集为 $3<x<4$.

9. 如图，AB 是⊙O 的直径，$\angle BAC=50°$，则$\angle D=$(　　)

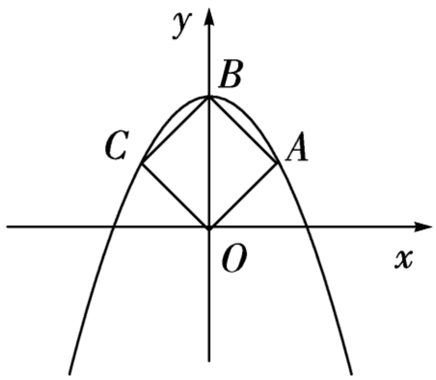


A. 20°　　B. 40°　　C. 50°　　D. 80°

9. B

【解析】∵AB是⊙O直径，$\angle BAC=50°$，∴$\angle ACB=90°$，$\angle B=180°-50°-90°=40°$，∵ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AC}$，∴$\angle D=\angle B=40°$.

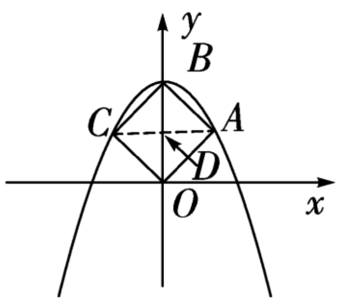
10. 如图，抛物线$y=ax^2+c$经过正方形$OABC$的三个顶点A，B，C，点B在y轴上，则ac的值为(　　)



A. -1　　B. -2　　C. -3　　D. -4

10. B

【解析】如解图，连接AC交y轴于点D，当$x=0$时，$y=c$，即$OB=c$，∵四边形$OABC$是正方形，∴$AC=OB=2AD=2OD=c$，$AC\perp OB$，∴$A(\frac{c}{2}，\frac{c}{2})$，∴$\frac{c}{2}=a\times\frac{c^2}{4}+c$，解得$ac=-2$.



解图

二、填空题(本大题共5小题，每小题3分，共15分)

11. 因式分解：$x^2-1=$____.

11. $(x+1)(x-1)$

【解析】解：原式＝（x+1）（x－1）.

12. 计算：$\sqrt{3}\times\sqrt{12}$＝______.

12. 6

【解析】$\sqrt{3}\times\sqrt{12}$

＝$\sqrt{3}\times2\sqrt{3}$

＝2×3

＝6.

【一题多解】

$\sqrt{3}\times\sqrt{12}$

＝$\sqrt{3\times12}$

＝$\sqrt{36}$

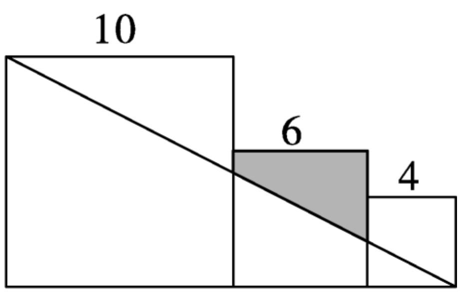
＝6.

13. 某蓄电池的电压为48V，使用此蓄电池时，电流I(单位：A)与电阻R(单位：Ω)的函数表达式为$I=\frac{48}{R}$.当R＝12Ω时，I的值为________A.

13. 4

【解析】当R＝12 Ω时，$I=\frac{48}{12}=4(A)$

14. 边长分别为10，6，4的三个正方形拼接在一起，它们的底边在同一直线上(如图)，则图中阴影部分的面积为___.



14. 15

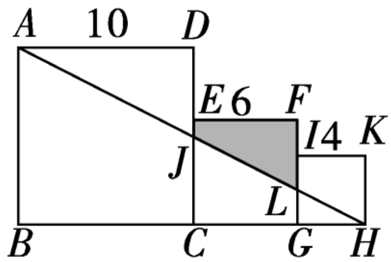
【解析】如解图，∵四边形$ABCD$，$ECGF$，$IGHK$均为正方形，

∴$CD=AD=10$，$CE=FG=CG=EF=6$，$\angle CEF=\angle F=90°$，$GH=IK=4$，∴$CH=CG+GH=10$，∴$CH=AD$，

∵$\angle D=\angle DCH=90°$，$\angle AJD=\angle HJC$，∴$\triangle ADJ\cong\triangle HCJ$(AAS)，∴$CJ=DJ=5$，∴$EJ=1$，

∵$GL\parallel CJ$，∴$\triangle HGL\backsim\triangle HCJ$，

$\therefore \frac{GL}{CJ}=\frac{GH}{CH}=\frac{2}{5}$，$\therefore GL=2$，$\therefore FL=4$，$\therefore S_{阴影}=S_{梯形EJLF}=\frac{1}{2}(EJ+FL)\cdot EF=\frac{1}{2}(1+4)\times 6=15$.



解图

15. 某商品进价 4 元，标价 5 元出售，商家准备打折销售，但其利润率不能少于 10%，则最多可打___折.

15. 8.8

【解析】设这种商品打 x 折销售，则售价为 $5\times0.1x$，利润为 $5\times0.1x-4$，$\therefore 5\times0.1x-4\geq4\times10\%$，解得 $x\geq8.8$，∴该商品最多可以打 8.8 折.

三、解答题(一)(本大题共 3 小题，第 16 题 10 分，第 17、18 题各 7 分，共 24 分)

16. (1)计算：$\sqrt[3]{8}+|-5|+(-1)^{2023}$.

(2)已知一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过点(0，1)与点(2，5)，求该一次函数的表达式.

16. 解：(1)原式$=2+5+(-1)$

$=6$;

(2)将点(0，1)，(2，5)代入 $y=kx+b$ 中，

得 $\begin{cases} b=1 \\ 2k+b=5 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} k=2 \\ b=1 \end{cases}$，

∴该一次函数的表达式为 $y=2x+1$.

17. 某学校开展了社会实践活动，活动地点距离学校 12km.甲、乙两同学骑自行车同时从学校出发，甲的速度是乙的 1.2 倍，结果甲比乙早到 10min，求乙同学骑自行车的速度.

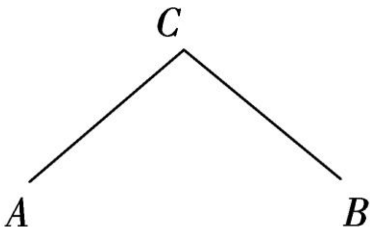
17. 解：设乙同学骑自行车的速度为 $x$km/h，则甲同学骑自行车的速度为 1.2$x$km/h，

由题意得 $\frac{12}{x}-\frac{12}{1.2x}=\frac{10}{60}$，(4 分),解得 $x=12$.

经检验，$x=12$ 是原分式方程的解，且符合题意.

答：乙同学骑自行车的速度为 12km/h.

18. 2023 年 5 月 30 日，神舟十六号载人飞船发射取得圆满成功，3 名航天员顺利进驻中国空间站．如图中的照片展示了中国空间站上机械臂的一种工作状态．当两臂 $AC=BC=10$m，两臂夹角$\angle ACB=100°$时，求 A，B 两点间的距离．(结果精确到 0.1m，参考数据 $\sin50°\approx0.766$，$\cos50°\approx0.643$，$\tan50°\approx1.192$)

18. 解：如解图，连接 AB，过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D，

$\because AC=BC$，$\angle ACB=100°$，

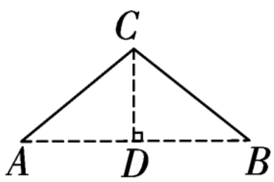
$\therefore \angle ACD=\frac{1}{2}\angle ACB=\frac{1}{2}\times 100°=50°$，

$\because \sin\angle ACD=\frac{AD}{AC}$，

$\therefore AD=AC\cdot \sin 50°\approx 10\times 0.766=7.66$，

$\therefore AB=2AD=2\times 7.66\approx 15.3(\mathrm{m})$.

答：A，B 两点间的距离大约为 15.3m.



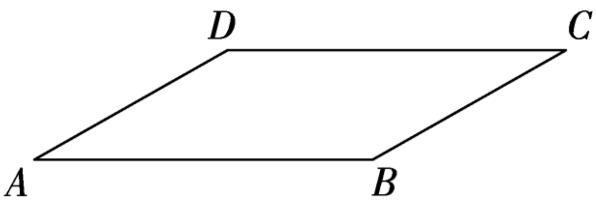
解图

四、解答题(二)(本大题共 3 小题，每小题 9 分，共 27 分)

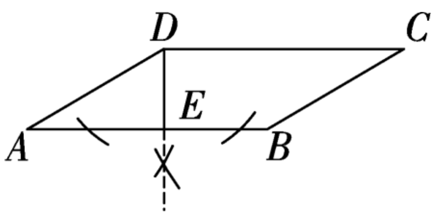
19. 如图，在▱$ABCD$ 中，$\angle DAB=30°$.

(1)实践与操作：用尺规作图法过点 D 作 AB 边上的高 DE；(保留作图痕迹，不要求写作法)

(2)应用与计算：在(1)的条件下，$AD=4$，$AB=6$，求 BE 的长.



19. 解：(1)如解图，DE 即为所求；



解图

(2)在 Rt△ADE 中，$\because \angle DAB=30°$，

$\therefore AE = AD \cdot \cos\angle DAB = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$，

$\therefore BE = AB - AE = 6 - 2\sqrt{3}$，

$\therefore BE$ 的长为 $6 - 2\sqrt{3}$.

20. 综合与实践

主题：制作无盖正方体形纸盒

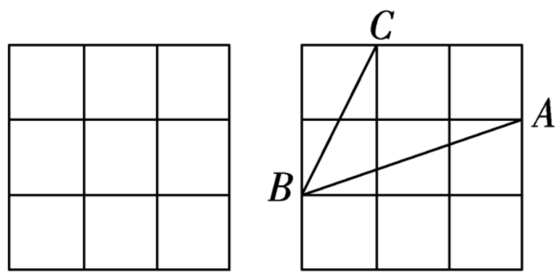
素材：一张正方形纸板.

步骤 1：如图①，将正方形纸板的边长三等分，画出九个相同的小正方形，并剪去四个角上的小正方形；

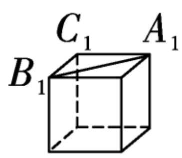
步骤 2：如图②，把剪好的纸板折成无盖正方体形纸盒.

猜想与证明：(1)直接写出纸板上$\angle ABC$与纸盒上$\angle A_1B_1C_1$的大小关系；

(2)证明(1)中你发现的结论.



图①



图②

20. (1)**解：** $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$；

(2)**证明：** 如解图，连接 AC，

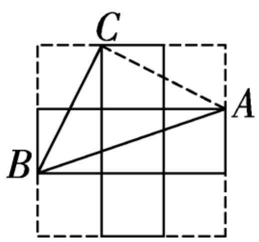
设小正方形边长为 1，则 $AC^2 = BC^2 = 1^2+2^2=5$，$AB^2 = 12+3^2=10$，

$\because AC^2 + BC^2 = AB^2$，

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰直角三角形，

由题意知，$\triangle A_1B_1C_1$ 为等腰直角三角形，

$\therefore \angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.



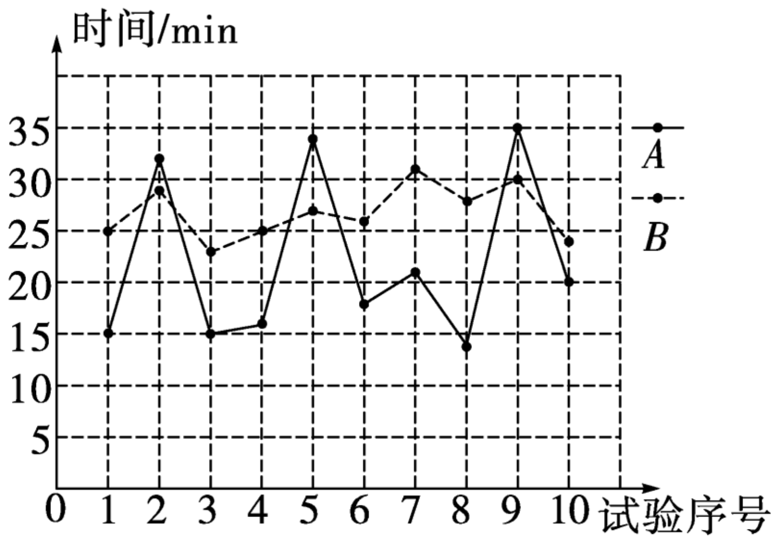
解图

21. 小红家到学校有两条公共汽车线路．为了解两条线路的乘车所用时间，小红做了试验，第一周(5 个工作日)选择 A 线路，第二周(5 个工作日)选择 B 线路，每天在固定时间段内乘车 2 次并分别记录所用时间．数据统计如下：(单位：min)

数据统计表

试验序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A 线路所用时间	15	32	15	16	34	18	21	14	35	20
B 线路所用时间	25	29	23	25	27	26	31	28	30	24

数据折线统计图



根据以上信息解答下列问题：

	平均数	中位数	众数	方差
A 线路所用时间	22	a	15	63.2
B 线路所用时间	b	26.5	c	6.36

(1)填空：a=______；b=______；c=______；

(2)应用你所学的统计知识，帮助小红分析如何选择乘车线路．

21. 解：(1)19；26.8；25；

(2)观察折线图可知，A 线路所用时间平均数小于 B 线路所用时间平均数，A 线路所用时间中位数也小于 B 线路所用时间中位数，但 A 线路所用时间的方差比较大，说明 A 线路比较短，但容易出现拥堵情况，B 线路比较长，但交通顺畅，总体上来讲 A 路线优于 B 路线.

建议：根据上学到校的剩余时间而定，如果上学到校剩余时间比较短，比如剩余时间是 21 分钟，则选择 A 路线，因为 A 路线的时间不大于 21 分钟的次数有 7 次，而 B 路线的时间都大于 21 分钟；如果剩余时间不短也不长，比如剩余时间是 31 分钟，则选择 B 路线，因为 B 路线的时间都不大于 31 分钟，而 A 路线的时间大于 31 分钟有 3 次，选择 B 路线可以确保不迟到；如果剩余时间足够长，比如剩余时间是 36 分钟，则选择 A 路线，在保证不迟到的情况，选择平均时间更少，中位数更小的路线.

【解析】将 A 线路所用时间按从小到大顺序排列得 14，15，15，16，18，20，21，32，34，35，中间两个数是 18，20，

$\therefore A$ 线路所用时间的中位数 $a=\frac{18+20}{2}=19$，由题意可知 B 线路所用时间的平均数 $b=\frac{25+29+23+25+27+26+31+28+30+24}{10}=26.8$，

$\because B$ 线路所用时间中，出现次数最多的数据是 25，$\therefore B$ 线路所用时间的众数 $c=25$.

五、解答题(三)(本大题共 2 小题，每小题 12 分，共 24 分)

22. 综合探究

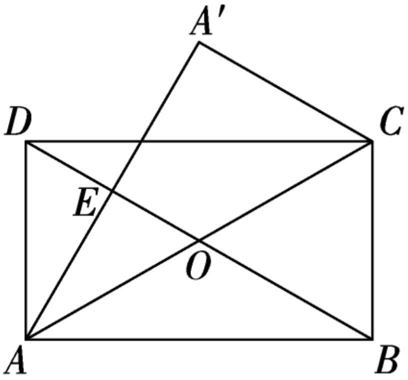
如图①，在矩形 $ABCD$ 中($AB>AD$)，对角线 AC，BD 相交于点 O，点 A 关于 BD 的对称点为 A'.连接 AA'交 BD 于点 E，连接 CA'.

(1)求证：$AA'\perp CA'$；

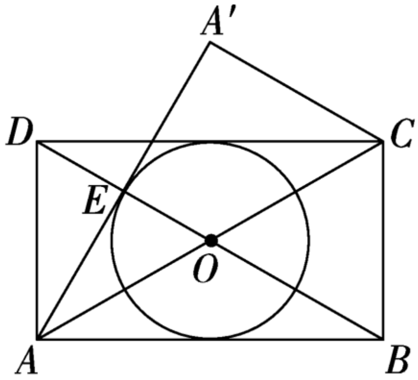
(2)以点 O 为圆心，OE 为半径作圆.

①如图②，$\odot O$ 与 CD 相切，求证：$AA'=\sqrt{3}CA'$；

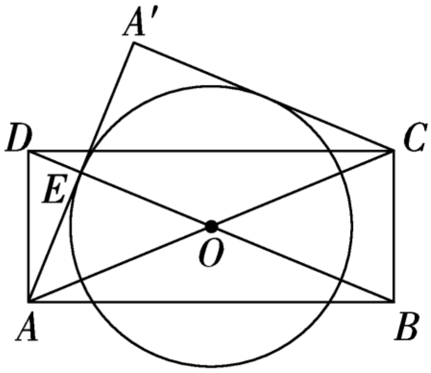
②如图③，$\odot O$ 与 CA'相切，$AD=1$，求$\odot O$ 的面积.



图①



图②



图③

22. (1)**证明：**$\because$点 A 关于 BD 的对称点为 A'，

$\therefore AE=A'E$，$AA'\perp BD$，

$\because$四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore OA=OC$，

$\therefore OE\parallel A'C$，

$\therefore AA'\perp CA'$；

(2)①**证明：**如解图①，设⊙O 与 CD 的切点为 F，连接 FO 并延长，交 AB 于点 G，

$\therefore FG\perp CD$，

$\because$四边形 $ABCD$ 是矩形，$\therefore OB=OD=OA=\frac{1}{2}BD$，$AB\parallel CD$，$FG\perp AB$，

$\therefore \angle FDO=\angle \mathrm{GB}O$，$\angle GAO=\angle \mathrm{GB}O$，

又$\because \angle DOF=\angle BOG$，

$\therefore \triangle DOF\cong\triangle BOG(\mathrm{ASA})$，

$\therefore OG=OF=OE$，

由(1)知 $AA'\perp BD$，

$\because OG\perp AB$，$\therefore \angle EAO=\angle GAO$，

$\therefore \angle \mathrm{GB}O=\angle EAO$，

$\because \angle EAB+\angle \mathrm{GB}O=90^\circ$，

$\therefore \angle EAO+\angle GAO+\angle \mathrm{GB}O=90^\circ$，

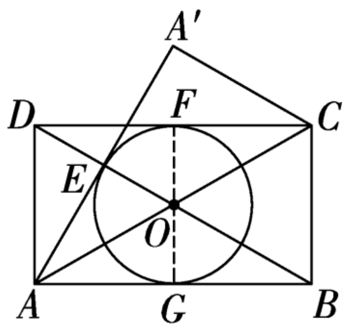
$\therefore 3\angle EAO=90^\circ$，

$\therefore \angle EAO=30^\circ$，

由(1)知 $AA'\perp CA'$，

$\therefore \tan\angle EAO=\frac{CA'}{AA'}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore AA'=\sqrt{3}CA'$；



解图①

②**解：**如解图②，设⊙O 与 CA'的切点为 H，连接 OH，$\therefore OH\perp CA'$，

由(1)知 $AA'\perp CA'$，$AA'\perp BD$，$OA=OC$，

$\therefore OH\parallel AA'$，$OE\parallel CA'$，

$\therefore\triangle COH\backsim\triangle CAA'$，$\triangle AOE\backsim\triangle ACA'$，

$\therefore\frac{OH}{AA'}=\frac{OC}{AC}=\frac{1}{2}$，$\frac{OE}{CA'}=\frac{OA}{CA}=\frac{1}{2}$，

$\therefore AA'=2OH$，$CA'=2OE$，

$\therefore AA'=CA'$，

$\therefore\angle A'AC=\angle A'CA=45°$，

$\therefore\angle AOE=\angle ACA'=45°$，

$\therefore AE=OE$，$OD=OA=\sqrt{2}AE$，

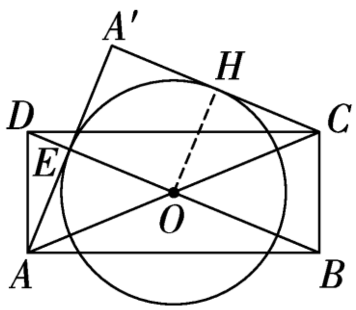
设 $AE=x$，则 $OD=OA=\sqrt{2}x$，

$\therefore DE=OD-OE=(\sqrt{2}-1)x$，

在 Rt$\triangle ADE$ 中，$x^2+[(\sqrt{2}-1)x]^2=1^2$，

$\therefore x^2=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$，

$\therefore S_{\odot O}=\pi\cdot OE^2=\frac{2\pi+\sqrt{2}\pi}{4}$.



解图②

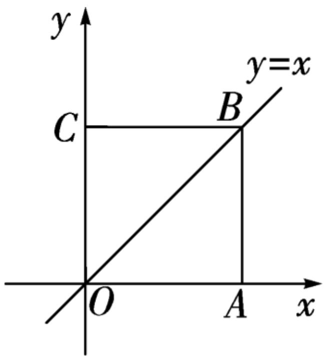
23. 综合运用

如图①，在平面直角坐标系中，正方形 $OABC$ 的顶点 A 在 x 轴的正半轴上．如图②，将正方形 $OABC$ 绕点 O 逆时针旋转，旋转角为 $\alpha(0°<\alpha<45°)$，AB 交直线 $y=x$ 于点 E，BC 交 y 轴于点 F.

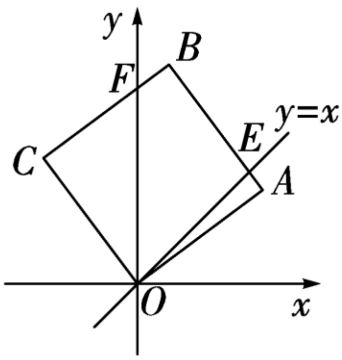
(1)当旋转角$\angle COF$为多少度时，$OE=OF$；(直接写出结果，不要求写解答过程)

(2)若点 $A(4，3)$，求 FC 的长；

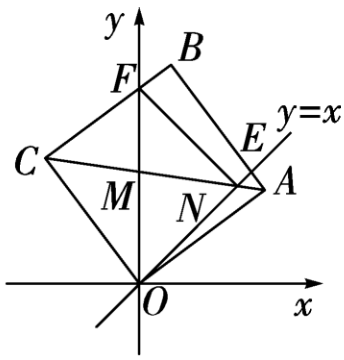
(3)如图③，对角线 AC 交 y 轴于点 M，交直线 $y=x$ 于点 N，连接 FN.将$\triangle OFN$与$\triangle OCF$的面积分别记为 S_1 与 S_2.设 $S=S_1-S_2$，$AN=n$，求 S 关于 n 的函数表达式．



图①



图②



图③

23. 解：(1)22.5°；

【解析】∵四边形 $OABC$ 是正方形，

∴$OA=OC$，若 $OE=OF$，则 $\mathrm{Rt}\triangle OCF\cong\mathrm{Rt}\triangle OAE(\mathrm{HL})$，

∴$\angle COF=\angle AOE$，

∵$\angle COF=\alpha$，$\angle AOE=45°-\alpha$，

∴$\alpha=45°-\alpha$，解得 $\alpha=22.5°$.

(2)如解图①，过点 A 作 $AP\perp x$ 轴于点 P，

∵$A(4,3)$，

∴$AP=3$，$OP=4$，∴$OA=5$，

∵四边形 $OABC$ 是正方形，

∴$OC=OA=5$，$\angle C=90°$，

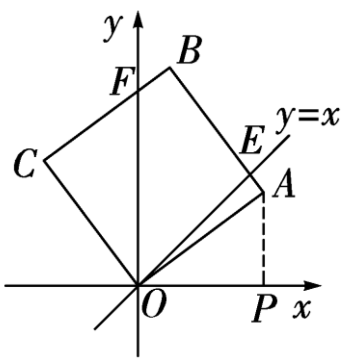
∴$\angle C=\angle APO=90°$，

∵$\angle FOC=\angle AOP$，

∴$\triangle OCF\backsim\triangle OPA$，

∴$\frac{OC}{OP}=\frac{FC}{AP}$，即 $\frac{5}{4}=\frac{FC}{3}$，

∴$FC=\frac{15}{4}$；



解图①

(3)如解图②，∵四边形 $OABC$ 是正方形，

∴$\angle BCA=\angle OCA=45°$，

∵直线 ON 的解析式为 $y=x$，

∴$\angle FON=45°$，

∴$\angle BCA=\angle FON=45°$，

∴O，C，F，N 四点共圆，

∴$\angle OCN=\angle OFN=45°$，

∴$\angle OFN=\angle FON=45°$，

∴$\triangle FON$ 为等腰直角三角形，

∴$FN=ON$，$\angle FNO=90°$，

过点 N 作 $NG\perp BC$ 于点 G，延长 GN 交 OA 于点 Q，

∵$BC\parallel OA$，

∴$GQ\perp OA$，

∵$\angle FNO=90°$，

∴$\angle 1+\angle 2=90°$，

∵$\angle 1+\angle 3=90°$，

∴$\angle 2=\angle 3$，

∴$\triangle FGN\cong\triangle NQO$(AAS)，

∴$GN=QO$，$FG=NQ$.

∵$GQ\perp BC$，$\angle FCO=\angle COQ=90°$，

∴四边形 $COQG$ 为矩形，

∴$CG=OQ$，$CO=QG$，

∴$S_1=S_{\triangle OFN}=\frac{1}{2}ON^2=\frac{1}{2}(OQ^2+NQ^2)=\frac{1}{2}(GN^2+NQ^2)=\frac{1}{2}GN^2+\frac{1}{2}NQ^2$，

$S_2=S_{\triangle COF}=\frac{1}{2}CF\cdot CO=\frac{1}{2}(GC-FG)(GN+NQ)=\frac{1}{2}(GN^2-NQ^2)=\frac{1}{2}GN^2-\frac{1}{2}NQ^2$，

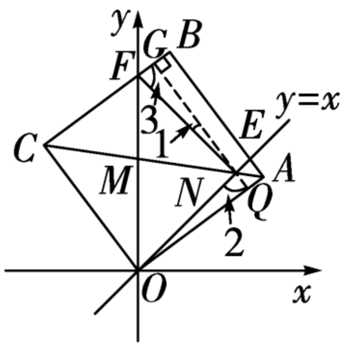
∴$S=S_1-S_2=NQ^2$，

∵$\angle OAC=45°$，

∴$\triangle AQN$ 为等腰直角三角形，

∴$NQ=\frac{\sqrt{2}}{2}AN=\frac{\sqrt{2}}{2}n$，

∴$S=NQ^2=\frac{1}{2}n^2$.



解图②