2026年广东省深圳市34校联考中考数学三模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：（每小题只有一个选项，每小题3分，共计24分）

1．（3分）中国是最早认识和使用负数的国家，我国古代数学名著《九章算术》在“方程”章中首次出现了负数，如“卖所得的钱为正，买所付的钱为负”．某人卖东西所得5钱可以表示为+5，则买东西付2钱可以记为（　　）

A．+5　　B．﹣5　　C．+2　　D．﹣2

【分析】用正负数表示两种具有相反意义的量，据此即可得出答案．

【解答】解：某人卖东西所得5钱可以表示为+5，

则买东西付2钱可以记为﹣2，

故选：*D*．

【点评】本题考查正数和负数，理解具有相反意义的量是解题的关键．

2．（3分）手机里某天气预报*APP*的生活服务板块有以下四个提示图标，是轴对称图形的是（　　）

A． B． C． D．

【分析】如果一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形叫做轴对称图形，据此进行判断即可．

【解答】解：*A*，*B*，*C*不是轴对称图形，*D*是轴对称图形，

故选：*D*．

【点评】本题考查轴对称图形，熟练掌握其定义是解题的关键．

3．（3分）下列计算中正确的是（　　）

A．$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$　　B．$(-a^3)^2=-a^6$

C．$2a+3b=5ab$　　D．$(a+b)^2=a^2+b^2$

【分析】利用平方差公式，幂的乘方，合并同类项法则，完全平方公式逐项判断即可．

【解答】解：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，则*A*符合题意，

$(-a^3)^2=a^6$，则*B*不符合题意，

$2a$与$3b$不是同类项，无法合并，则*C*不符合题意，

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，则*D*不符合题意，

故选：*A*．

【点评】本题考查平方差公式，幂的乘方，合并同类项法则，完全平方公式，因式分解，熟练掌握相关运算法则是解题的关键.

4.（3 分）人工智能大模型在工作中应用越来越广泛，某校数学教研组想在数学教学中引进一款大模型进行辅助教学，为此对比了两款大模型在数学解题中的能力表现，进行了 6 次测试，如表是测试成绩，则下列说法错误的是（　　）

大模型 A	90	93	88	90	89	90
大模型 B	91	85	95	95	84	90

A．大模型 A 测试成绩的中位数为 89

B．模型 B 的测试成绩的众数为 95

C．两款大模型测试得分的平均数相同

D．大模型 A 的方差比大模型 B 的方差小

【分析】根据中位数、众数、平均数、方差的概念与计算，分别计算两个模型对应统计量，即可判断出错误说法.

【解答】解：首先将大模型 A 成绩从小到大排序，得 88，89，90，90，90，93，

∵共 6 个数据，中位数为第 3、4 个数据的平均数，

∴A 的中位数为$\frac{90+90}{2}=90$，故选项 A 说法错误；

对选项 B，将大模型 B 成绩从小到大排序，得 84，85，90，91，95，95，

∵95 出现次数最多，

∴B 的众数为 95，选项 B 说法正确；

∵A 的平均数$\overline{x}_A=\frac{88+89+90+90+90+93}{6}=90$，

B 的平均数$\overline{x}_B=\frac{84+85+90+91+95+95}{6}=90$，

∴两款平均数相同，选项 C 说法正确；

∵$S_A^2=\frac{1}{6}[(88-90)^2+(89-90)^2+3\times(90-90)^2+(93-90)^2]=\frac{7}{3}$，

$S_B^2=\frac{1}{6}[(84-90)^2+(85-90)^2+(90-90)^2+(91-90)^2+2\times(95-90)^2]=\frac{56}{3}$，

∴$S_A^2<S_B^2$，即 A 的方差比 B 的方差小，选项 D 说法正确.

故选：A.

【点评】本题考查了数据分析能力，掌握数据分析能力是解题的关键.

5.（3 分）小圳在博物馆观察到一件藏品的边框为正八边形，他立马就算出了其一个内角的度数为（　　）

A．60°　　B．108°　　C．135°　　D．150°

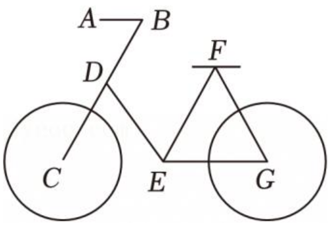
【分析】根据正八边形的性质以及多边形内角和的计算方法进行计算即可．

【解答】解：正八边形的每一个内角的度数为$\frac{(8-2)\times180°}{8}$=135°，

故选：C．

【点评】本题考查多边形的内角与外角，掌握正八边形的性质以及多边形内角和的计算方法是正确解答的关键．

6．（3 分）自行车的车架设计蕴含丰富的几何知识．如图，自行车的车把手 AB 与地面平行．后轮支撑结构为△EFG，∠EFG＝60°，EG＝FG，前轮支撑结构 BD，EF 互相平行．已知∠CDE＝60°，则∠DEG 的度数为（　　）



A．60°　　B．120°　　C．135°　　D．150°

【分析】根据平行线的性质得出∠DEF＝∠CDE＝60°，进而利用等边三角形的判定与性质得出∠FEG＝60°，进而解答即可．

【解答】解：∵BD∥EF，∴∠DEF＝∠CDE＝60°，

∵∠EFG＝60°，EG＝FG，∴△EFG 是等边三角形，

∴∠FEG＝60°，∴∠DEG＝60°+60°＝120°，

故选：B．

【点评】此题考查等边三角形的性质，关键是利用等边三角形的判定与性质得出∠FEG＝60°解答．

7．（3 分）某数据中心计划采购 A、B 两种国产算力芯片，已知每张 A 芯片比 B 芯片算力少 100$TFLOPS$，第一次采购了 12000$TFLOPS$ 算力的 A 芯片，1 个月后，因算力需求激增，又购进 15000$TFLOPS$ 算力的 B 芯片，已知采购的 A 芯片比 B 芯片多 100 张，设 A 芯片算力为 $x$$TFLOPS$，下列方程正确的为（　　）

A．$\frac{12000}{x}=\frac{15000}{x+100}+100$　　B．$\frac{12000}{x}+100=\frac{15000}{x+100}$

C. $\frac{12000}{x+100}=\frac{15000}{x}+100$　　　　D. $\frac{12000}{x+100}+100=\frac{15000}{x}$

【分析】设 A 芯片算力为 $xTFLOPS$，则 B 芯片算力为（x+100）$TFLOPS$，利用采购数量＝总算力÷每张芯片的算力，结合采购的 A 芯片比 B 芯片多 100 张，即可列出关于 x 的分式方程，此题得解．

【解答】解：设 A 芯片算力为 $xTFLOPS$，则 B 芯片算力为（x+100）$TFLOPS$，

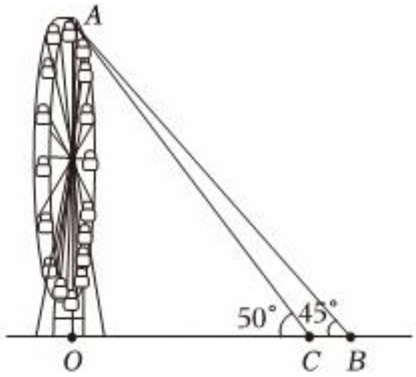
根据题意得：$\frac{12000}{x}=\frac{15000}{x+100}+100$.

故选：A．

【点评】本题考查了由实际问题抽象出分式方程，找准等量关系，正确列出分式方程是解题的关键．

8．（3 分）深圳前海“湾区之光”摩天轮是深圳的地标性建筑，如图①其轮面与地面垂直，某数学兴趣小组为测量摩天轮的高度，如图②在摩天轮前方的水平地面上选取点 B，测得摩天轮最高点 A 的仰角为 45°，将点 B 向摩天轮方向移动 21.3 米到点 C，此时测得摩天轮最高点 A 的仰角为 50°，摩天轮的高度约为多少米（　　）（结果保留整数）.（参考数据：sin50°≈0.77，cos50°≈0.64，tan50°≈1.20）

图①



图②

A．154 米　　　　B．150 米　　　　C．128 米　　　　D．107 米

【分析】设 OC＝x 米，则 OB＝（21.3+x）米，然后分别在 Rt△AOC 和 Rt△AOB 中，利用锐角三角函数的定义求出 AO 的长，从而列出关于 x 的方程，进行计算即可解答．

【解答】解：设 OC＝x 米，

∵BC＝21.3 米，∴OB＝OC+BC＝（21.3+x）米，

在 Rt△AOC 中，∠ACO＝50°，

∴AO＝OC•tan50°≈1.2x（米），

在 Rt△AOB 中，∠ABO＝45°，

∴AO＝OB•tan45°＝（21.3+x）米，∴1.2x＝21.3+x，解得：x＝106.5，

∴AO＝21.3+x＝127.8≈128（米），∴摩天轮的高度约为 128 米，

故选：C．

【点评】本题考查了解直角三角形的应用－仰角俯角问题，准确熟练地进行计算是解题的关键．

二、填空题：（每小题 3 分，共计 15 分）

9．（3 分）已知 $a+b=4$，$a-b=2$，则 a^2-b^2 的值为 <u> 8 </u> ．

【分析】根据平方差公式将 a^2-b^2 转化为（$a+b$）（$a-b$），再代入计算即可．

【解答】解：∵$a+b=4$，$a-b=2$，

∴$a^2-b^2=$（$a+b$）（$a-b$）$=4\times2=8$，

故答案为：8．

【点评】本题考查平方差公式，掌握平方差公式的结构特征是正确应用的前提．

10．（3 分）如果不等式组$\begin{cases}x-2>1\\x<m\end{cases}$无解，$m$ 的取值可以是<u> 2（答案不唯一） </u>（写一个符合要求的即可）．

【分析】解第一个不等式求得其解集，然后根据原不等式组无解确定 m 的取值范围，据此写出一个符合题意的 m 的值即可．

【解答】解：解第一个不等式得：$x>3$，

∵原不等式组无解，∴$m\leqslant3$，

那么 m 的值可以是 2，故答案为：2（答案不唯一）．

【点评】本题考查解一元一次不等式组，熟练掌握解不等式组的方法是解题的关键．

11．（3 分）如果反比例函数$y=\frac{k}{x}$的图象经过点（－2，－2），那么直线 $y=(k-1)x$ 一定经过点（2，<u> 6 </u>）．

【分析】依据题意，把点的坐标代入反比例函数解析式，求出 k 的值，再把 $x=2$，k 的值分别代入直线解析式，求出 y 的值即可．

【解答】解：∵反比例函数$y=\frac{k}{x}$的图象经过点（－2，－2），

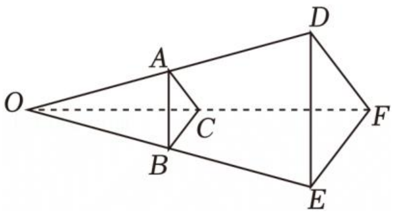
∴$k=$（－2）×（－2）$=4$．

∴把 $x=2$，$k=4$ 代入 $y=$（$k-1$）x 得 $y=$（4－1）×2，即 $y=6$．

故答案为：6．

【点评】本题考查了反比例函数、一次函数的图象上的点的坐标，解题的关键是掌握函数图象上点的坐标的特征．

12．（3 分）如图，△ABC 和△DEF 是以 O 为位似中心的位似图形，已知 A、B、C 为 OD、OE、OF 的中点，已知△ABC 的面积为 4，则△DEF 的面积为<u> 16 </u>．



【分析】结合题意可得△ABC与△DEF的相似比为$\frac{1}{2}$，则△ABC与△DEF的面积比为$\frac{1}{4}$，进而可得答案.

【解答】解：∵A、B、C为OD、OE、OF的中点，

∴$\frac{OA}{OD}=\frac{OB}{OE}=\frac{OC}{OF}=\frac{1}{2}$，

∴△ABC与△DEF的相似比为$\frac{1}{2}$，

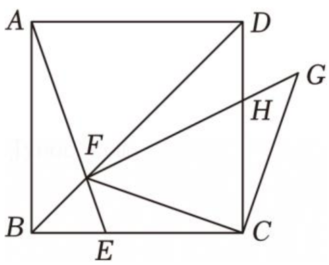
∴△ABC与△DEF的面积比为$\frac{1}{4}$.

∵△ABC的面积为4，∴△DEF的面积为16.

故答案为：16.

【点评】本题考查位似变换、三角形中位线定理，熟练掌握位似的性质是解答本题的关键.

13.（3分）如图所示，在正方形$ABCD$中，点E在BC上，AE、BD交于点F，连接CF，将线段CF绕点C顺时针旋转90°，得到线段CG，连接FG交CD于点H．若$\tan\angle BAE=\frac{1}{3}$，则$\frac{DH}{CH}=$ $\underline{\frac{3}{5}}$.



【分析】连接DG，设$AB=3m$，由正方形的性质得$AD=AB=CB=CD=3m$，$\angle BAD=\angle ABC=\angle BCD=90°$，则$\angle ADB=\angle ABF=\angle CBF=\angle CDB=45°$，可证明△$EBF$∽△$ADF$，则$\frac{EF}{AF}=\frac{EB}{AD}=\frac{EB}{AB}=\tan\angle BAE=\frac{1}{3}$，所以$EB=\frac{1}{3}AB=m$，求得$AE=\sqrt{10}m$，则$AF=\frac{3}{4}AE=\frac{3\sqrt{10}}{4}m$，再证明△$ABF$≌△$CBF$，得$AF=CF=\frac{3\sqrt{10}}{4}m$，由旋转得$\angle FCG=90°$，$CG=CF=\frac{3\sqrt{10}}{4}m$，则$\angle CGH=\angle CFG=45°$，$\angle DCG=\angle BCF=90°-\angle DCF$，可证明△$CDG$≌△$CBF$，得$\angle CDG=\angle CBF=45°$，进而证明△$GCH$∽△$DCG$，得$\frac{CH}{CG}=\frac{CG}{CD}$，则$CH=\frac{CG^2}{CD}=\frac{15}{8}m$，求得$DH=\frac{9}{8}m$，则$\frac{DH}{CH}=\frac{3}{5}$，于是得到问题的答案.

【解答】解：连接DG，设$AB=3m$，

∵四边形$ABCD$是正方形，

∴$CB\parallel AD$，$AD=AB=CB=CD=3m$，$\angle BAD=\angle ABC=\angle BCD=90°$，

∵点E在BC上，AE、BD交于点F，∴$\angle ADB=\angle ABF=\angle CBF=\angle CDB=45°$，

∵$EB // AD$，∴$\triangle EBF \backsim \triangle ADF$，

∴$\frac{EF}{AF}=\frac{EB}{AD}=\frac{EB}{AB}=\tan\angle BAE=\frac{1}{3}$，∴$EB=\frac{1}{3}AB=m$，

∴$AE=\sqrt{AB^2+EB^2}=\sqrt{(3m)^2+m^2}=\sqrt{10}m$，∴$AF=\frac{3}{1+3}AE=\frac{3}{4}AE=\frac{3\sqrt{10}}{4}m$，

在$\triangle ABF$和$\triangle CBF$中$\begin{cases}AB=CB\\ \angle ABF=\angle CBF\\ BF=BF\end{cases}$，∴$\triangle ABF\cong\triangle CBF$（$SAS$），∴$AF=CF=\frac{3\sqrt{10}}{4}m$，

∵将线段CF绕点C顺时针旋转$90°$，得到线段CG，连接FG交CD于点H，

∴$\angle FCG=90°$，$CG=CF=\frac{3\sqrt{10}}{4}m$，

∴$\angle CGH=\angle CFG=45°$，$\angle DCG=\angle BCF=90°-\angle DCF$，

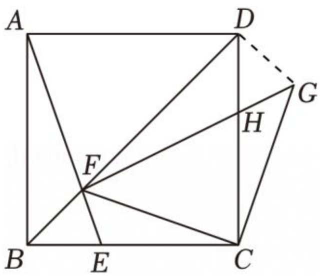
在$\triangle CDG$和$\triangle CBF$中，$\begin{cases}CG=CF\\ \angle DCG=\angle BCF\\ CD=CB\end{cases}$，∴$\triangle CDG\cong\triangle CBF$（$SAS$），

∴$\angle CDG=\angle CBF=45°$，∴$\angle CGH=\angle CDG$，

∵$\angle GCH=\angle DCG$，∴$\triangle GCH\backsim\triangle DCG$，∴$\frac{CH}{CG}=\frac{CG}{CD}$，

∴$CH=\frac{CG^2}{CD}=\frac{(\frac{3\sqrt{10}}{4}m)^2}{3m}=\frac{15}{8}m$，∴$DH=CD-CH=3m-\frac{15}{8}m=\frac{9}{8}m$，∴$\frac{DH}{CH}=\frac{\frac{9}{8}m}{\frac{15}{8}m}=\frac{3}{5}$，

故答案为：$\frac{3}{5}$.



【点评】此题重点考查正方形的性质、等腰直角三角形的性质、相似三角形的判定与性质、勾股定理、解直角三角形等知识，正确地添加辅助线是解题的关键.

三、解答题（本大题共7小题，共61分，解答应写出必要的文字说明或推演步骤）

14.（6分）计算：$(-1)^{2012}-6\cos30°+|\sqrt{27}-1|+(\frac{1}{3})^{-2}$.

【分析】利用有理数的乘方法则，绝对值的性质，特殊锐角三角函数值，负整数指数幂计算后再算加减即可.

【解答】解：原式$=1-6\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{27}-1+9=1-3\sqrt{3}+3\sqrt{3}-1+9=9$.

【点评】本题考查实数的运算，特殊锐角三角函数值，负整数指数幂，熟练掌握相关运算法则是解题的关键．

15．（7 分）先化简，再求值$(x-\frac{4}{x})\div\frac{x-2}{x}$，其中$x=\sqrt{2}-2$．

【分析】将括号内的式子通分并计算，然后算除法，最后把已知数值代入计算即可．

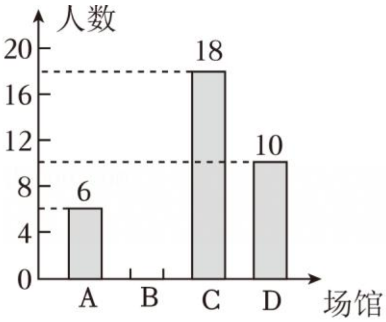
【解答】解：原式$=\frac{x^2-4}{x}\cdot\frac{x}{x-2}$

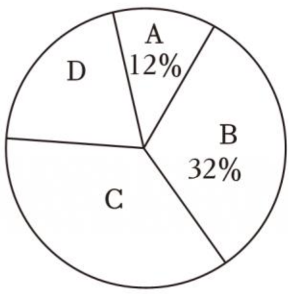
$=\frac{(x+2)(x-2)}{x}\cdot\frac{x}{x-2}$ $=x+2$；

当 $x=\sqrt{2}-2$ 时，原式$=\sqrt{2}-2+2=\sqrt{2}$．

【点评】本题考查分式的化简求值，熟练掌握相关运算法则是解题的关键．

16．（8 分）深圳教育秉承“以万物为教材、把世界作课堂”的核心理念，某校八年级开展“每周半天”计划活动，需从以下四个场馆中随机选择一个开展活动：A 光明欢乐田园、B 航天农业科技示范园、C 深圳湾实验室、D 深圳市博物馆，现从八年级同学们进行最想去的场馆抽样问卷调查，每个同学仅能从上面 4 个场馆中选择一个，且都选了一个，根据调查结果绘制了下面不完整的条形统计图和扇形统计图．





根据图中所给信息解答下列问题：

（1）此次抽样调查共有 50 人；

（2）补全条形统计图，并计算选择深圳市博物馆的同学所在扇形圆心角度数为 72° ；

（3）若该校八年级有 1000 名学生，估计该校八年级学生想去航天农业科技示范园的有多少人；

（4）该学校八年级（1）班想从上面 4 个场馆中随机选两个参观，请用列表或画树状图的方法，求恰好选择深圳市博物馆和深圳湾实验室的概率．

【分析】（1）用条形统计图中 A 的人数除以扇形统计图中 A 的百分比可得答案．

（2）求出选择 B 的人数，补全条形统计图即可；用 360° 乘以 D 的人数所占的百分比，即可得出答案．

（3）根据用样本估计总体，用 1000 乘以扇形统计图中 B 的百分比，即可得出答案．

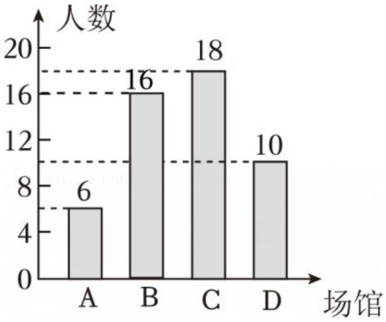
（4）列表可得出所有等可能的结果数以及恰好选择深圳市博物馆和深圳湾实验室的结果数，再利用概率公式可得出答案．

【解答】解：（1）由题意得，此次抽样调查共有 6÷12%＝50（人）.

故答案为：50.

（2）选择 B 的人数为 50×32%＝16（人）.

补全条形统计图如图所示.



选择深圳市博物馆的同学所在扇形圆心角度数为 $360^\circ\times\frac{10}{50}=72^\circ$.

故答案为：72°.

（3）1000×32%＝320（人）.

答：估计该校八年级学生想去航天农业科技示范园的约有 320 人.

（4）列表如下：

	A	B	C	D
A		（A，B）	（A，C）	（A，D）
B	（B，A）		（B，C）	（B，D）
C	（C，A）	（C，B）		（C，D）
D	（D，A）	（D，B）	（D，C）	

共有 12 种等可能的结果，其中恰好选择深圳市博物馆和深圳湾实验室的结果有：（C，D），（D，C），共 2 种，

∴恰好选择深圳市博物馆和深圳湾实验室的概率为$\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

【点评】本题考查列表法与树状图法、条形统计图、扇形统计图、用样本估计总体，能够读懂统计图，掌握列表法与树状图法以及用样本估计总体是解答本题的关键.

17.（9 分）$APEC$ 会议预计于 2026 年 11 月在深圳举行，这是中国第三次担任此会议的东道主，为让学生更加了解此次会议，学校想要组织学生手工制作联名产品帆布袋，需要购入原材料帆布袋和染料．已知购入 4 个帆布袋和 2 套染料共需 104 元，6 个帆布袋和 5 套染料共需 196 元.

（1）求帆布袋与染料的单价；

（2）制作 1 个成品帆布袋需要 1 个帆布袋原材料，1 套染料可以制作 5 个帆布袋，不计其余耗材及人工成本；该成品原定售价 30 元，平均每周可卖出 100 个；若单个售价每上涨 1 元，每周销量减少 5 个．若文创中心想要每周获利 1125 元，售价应定为多少元？

【分析】（1）设帆布袋的单价是 x 元/个，染料的单价是 y 元/套，根据“购入 4 个帆布袋和 2 套染料共需 104 元，6 个帆布袋和 5 套染料共需 196 元”，可列出关于 x，y 的二元一次方程组，解之即可得出结论；

（2）设售价应定为 m 元，则每个的销售利润为（$m-20$）元，平均每周可卖出（$250-5m$）个，利用总利润＝每个的销售利润×每周的销售量，可列出关于 m 的一元二次方程，解之即可得出结论．

【解答】解：（1）设帆布袋的单价是 x 元/个，染料的单价是 y 元/套，

根据题意得：$\begin{cases}4x+2y=104\\6x+5y=196\end{cases}$，解得：$\begin{cases}x=16\\y=20\end{cases}$．

答：帆布袋的单价是 16 元/个，染料的单价是 20 元/套；

（2）每个成品帆布袋的成本价为 $16+\frac{20}{5}=20$（元）．

设售价应定为 m 元，则每个的销售利润为（$m-20$）元，平均每周可卖出 $100-5$（$m-30$）＝（$250-5m$）个，

根据题意得：（$m-20$）（$250-5m$）＝1125，

整理得：$m^2-70m+1225=0$，

解得：$m_1=m_2=35$．

答：售价应定为 35 元．

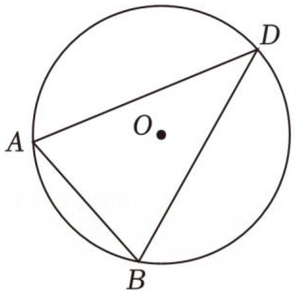
【点评】本题考查了二元一次方程组的应用以及一元二次方程的应用，解题的关键是：（1）找准等量关系，正确列出二元一次方程组；（2）找准等量关系，正确列出一元二次方程．

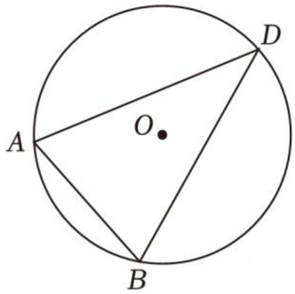
18．（9 分）如图，⊙O 是△ABD 的外接圆，$DA=DB$．

（1）尺规作图：作出点 C 使得四边形 $ABCD$ 是平行四边形；

（2）求证：CD 是⊙O 的切线；

（3）CB 与⊙O 交于点 E，若 $CE=4$，$AD=9$，求⊙O 的半径．





(备用图)

【分析】（1）利用两组对边分别相等的四边形为平行四边形的性质解答即可；

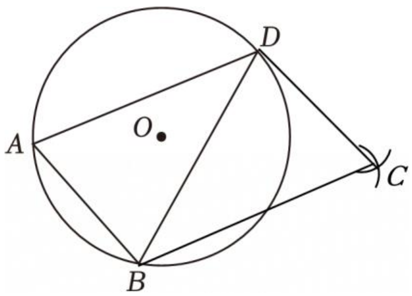
（2）连接 DO，并延长交 AB 于点 E，利用平行四边形的性质得到 $AB∥CD$，利用垂径定理得到 $DE⊥AB$，利用平行线的性质和圆的切线的判定定理解答即可得出结论；

（3）连接 DO，并延长交 AB 于点 F，连接 DE，OB，利用平行四边形的性质，等腰三角形的性质得到 $\angle BDC=\angle DEC$，利用相似三角形的判定与性质求得线段 DC，则 $AB=CD=6$，利用等腰三角形的性质和勾股定理求得 DF，设⊙O 的半径为 r，则 $OF=6\sqrt{2}-r$，利用勾股定理列方程解答即可得出结论.

【解答】（1）解：1．以点 B 为圆心，AD 的长为半径画弧，

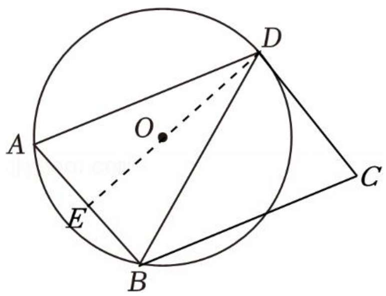
2．以点 D 为圆心，AB 的长为半径画弧，与前弧交于点 C，

3．连接 BC，CD，如图，



则四边形 $ABCD$ 为所求作的平行四边形.

（2）证明：连接 DO，并延长交 AB 于点 E，如图，



由作图知：$BC=AD$，$DC=AB$，

∴四边形 $ABCD$ 为平行四边形，∴$AB∥CD$，

∵$DA=DB$，∴$\widehat{DA}=\widehat{DB}$，∴$DE⊥AB$，∴$OD⊥CD$，

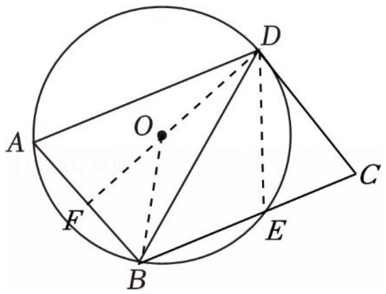
∵OD 为圆的半径，∴CD 是⊙O 的切线；

（3）解：连接 DO，并延长交 AB 于点 F，连接 DE，OB，如图，

∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

∴$AD=BC=9$，$\angle A=\angle C$，

∵四边形 $ABED$ 为圆的内接四边形，∴$\angle DEC = \angle A$，∴$\angle DEC = \angle C$，



∵$DA = DB$，∴$DB = BC$，

∴$\angle C = \angle BDC$，∴$\angle BDC = \angle DEC$，

∵$\angle C = \angle C$，∴$\triangle DEC \backsim \triangle BDC$，

∴$\frac{DC}{CE} = \frac{BC}{DC}$，∴$DC^2 = CE \cdot BC = 4 \times 9 = 36$，

∴$CD = 6$，∴$AB = CD = 6$，

∵$DA = DB$，∴$\widehat{DA} = \widehat{DB}$，∴$DF \perp AB$，

$AF = FB = \frac{1}{2}AB = 3$，∴$DF = \sqrt{AD^2 - AF^2} = 6\sqrt{2}$，

设⊙O 的半径为 r，则 $OF = DF - OD = 6\sqrt{2} - r$，

∵$OF^2 + BF^2 = OB^2$，∴$(6\sqrt{2} - r)^2 + 3^2 = r^2$，∴$r = \frac{27\sqrt{2}}{8}$．∴⊙$O$ 的半径为$= \frac{27\sqrt{2}}{8}$.

【点评】本题主要考查了等腰三角形的性质，平行四边形的性质，尺规作图，圆的有关性质，圆周角定理，圆的切线的判定定理，相似三角形的判定与性质，直角三角形的性质，勾股定理，连接经过切点的半径是解决此类问题常添加的辅助线.

19.（11 分）问题解决：

【实际情境】

深圳某科技公司在筹备一场盛大的无人机灯光秀，为确保表演效果与安全，技术人员需要用电脑软件给每架无人机绘制飞行路线（下列出现的无人机只向右飞行）.

【数学建模】

无人机甲在试飞阶段的飞行轨迹可抽象为抛物线 C 的一部分，飞行轨迹最高点距地面 $3m$，起飞点 O 和降落点 E（都在水平地面上）的距离为 $8m$，以 O 为原点，OE 所在直线为 x 轴，过点 O 多少与水平地面垂直的直线为 y 轴，建立如图所示的平面直角坐标系.

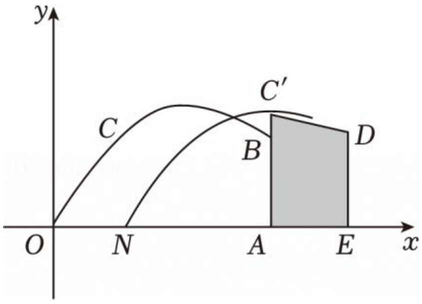
（1）求抛物线 C 的关系式;

【问题解决】

（2）无人机在越过障碍物时，与障碍物的上表面的每个点在竖直方向上的距离不少于 $0.15m$，才能安全通过．如图，在水平地面上放置了一个设备，该设备的纵切面为四边形 $ABDE$，其中 $AB = 2.85m$，$AE = 2m$，$DE = 2.4m$，$\angle BAE = \angle DEA = 90°$．无人机乙原计划从距离 AB 左侧 $4m$ 的点 N（2，0）处起飞（其飞行轨迹抛物线 C' 与抛物线 C 的形状和最高点距地面的高度均相同），发现不能安全越过障碍物．若该公司人员在起飞点 N 处放置一个平台，无人机乙从平台上的点 M（$MN \perp x$ 轴）处起飞后刚好安全通过障碍物，此时无人机乙的飞行轨迹记为抛物线 C''．

①求该平台的高度 MN；

②求当 $2\leqslant x\leqslant 8$ 时，在平台点 M 处起飞的无人机乙的飞行路线与无人机甲的试飞路线在 x 相同时的最大高度差．



【分析】(1) 根据题意可设抛物线 C 的关系式为 $y=a(x-4)^2+3$，然后根据待定系数法进行求解即可；

（2）①根据题意可设抛物线 C 的关系式为$y=-\frac{3}{16}(x-6)^2+3+h$，$B$（6，2.85），然后可把（8，2.55）代入抛物线 C” 的关系式为$y=-\frac{3}{16}(x-6)^2+3+h$进行求解即可；

②由①得抛物线 C'的关系式为$y=-\frac{3}{16}(x-6)^2+3.3$，当$-\frac{3}{16}(x-6)^2+3.3=-\frac{3}{16}(x-4)^2+3$时，则有$x=\frac{23}{5}$，然后结合图象可进行求解．

【解答】解：（1）根据题意得：抛物线 C 的顶点坐标为（4，3），

可设抛物线 C 的关系式为 $y=a(x-4)^2+3$，

将点（0，0）代入，得：$0=a(0-4)^2+3$，解得：$a=-\frac{3}{16}$，

∴抛物线 C 的关系式为$y=-\frac{3}{16}(x-4)^2+3$；

（2）①根据题意可设抛物线 C'的关系式为$y=-\frac{3}{16}(x-4-2)^2+3+h=-\frac{3}{16}(x-6)^2+3+h$，

∵$OE=8m$，$AE=2m$，$AB=2.85m$，

∴$OA=OE-AE=6m$，B（6，2.85），

∴此时点 B 正好在抛物线 C'最高点的下方，与最高点的距离超过 $0.15m$，

由题意可知：点 D 的坐标为（8，2.4），$2.4+0.15=2.55$，

∵无人机乙从平台上的点 M 处起飞后刚好安全通过障碍物，（8，2.55）恰好在抛物线 C'上，将点（8，2.55）代入$y=-\frac{3}{16}(x-6)^2+3+h$得：$2.55=-\frac{3}{16}(8-6)^2+3+h$，解得 $h=0.3$，

即该平台的高度 MN 为 $0.3m$；

②由①得抛物线 C'的关系式为$y=-\frac{3}{16}(x-6)^2+3.3$，

当$-\frac{3}{16}(x-6)^2+3.3=-\frac{3}{16}(x-4)^2+3$时，解得$x=\frac{23}{5}$，

结合图象可得，

当$2\le x<\frac{23}{5}$时，在 $x=2$ 时，有最大高度差，此时高度差为$\frac{39}{20}$，

当$\frac{23}{5}<x\le 8$时，在 $x=8$ 时，有最大高度差，高度差为$\frac{51}{20}$，

∴最大高度差为$\frac{51}{20}$.

【点评】本题主要考查了二次函数的图象与性质，掌握其相关知识点是解题的关键.

20.（11 分）概念学习：若三角形的有一组邻边之比为 k（$k>1$），则称该三角形为 k 倍比三角形.

【概念辨析】

下列三角形是$\sqrt{3}$倍比三角形的是__③④__.

①等边三角形；②等腰直角三角形；③30° 角的直角三角形；④直角边分别为 1 和$\sqrt{2}$的直角三角形；

【问题探究】

小明想研究 k 倍比三角形，发现有点困难，他先尝试从特殊情况出发，用几何画板画出一个特殊的 2 倍比△ABC，其中$\frac{AC}{BC}=2$，$AB=3$，当他试着让点 C 动起来时发现 C 点竟然在一个圆上运动.

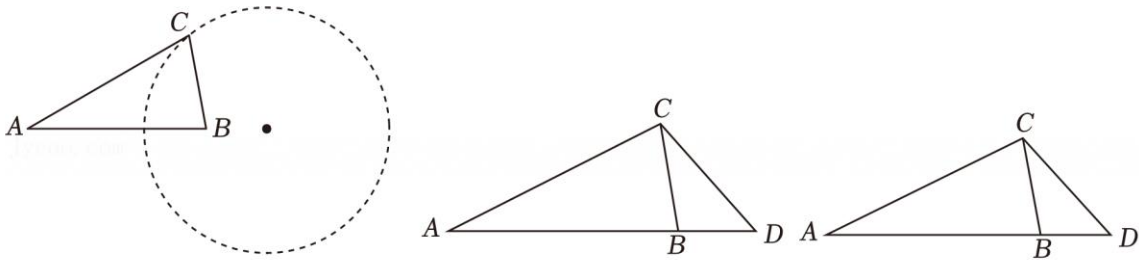
好奇的小明想该如何用数学的方法证明 C 在圆上运动呢，这时他想到：既然△ABC 的$\frac{AC}{BC}=2$，那我好像可以以 AC 和 BC 为对应边构造一组相似三角形．于是他延长 AB 至点 D，使得∠DCB=∠DAC…，所以 C 在以 D 为圆心，CD 长为半径的圆上.

请你顺着小明的思路，求出 C 点所在圆的半径.

【拓展研究】

（1）从特殊到一般：若△ABC 是 k 倍比三角形，$\frac{AC}{BC}=k$，$AB=c$，请求出点 C 所在圆的半径（用 k，c 表示）.

（2）△ABC 为$\sqrt{2}$倍比三角形，$AC=\sqrt{2}BC$，将点 C 绕点 A 逆时针旋转 90° 得到点 D，连接 BD，若 $AB=2$，$BD=2\sqrt{5}$，直接写出 AC 的长为__$2\sqrt{2}$或$\frac{2\sqrt{170}}{5}$__.



【分析】【概念辨析】根据勾股定理及各三角形的特征作答即可；

【问题探究】证明△DCB∽∠DAC，得到$\frac{BD}{CD}=\frac{CD}{AD}=\frac{CB}{AC}=\frac{1}{2}$，设 $BD=x$，则 $CD=2x$，$AD=4x$，根据 $AB=3$ 求出 x 的值，进而求出 CD 的长即可；

【拓展研究】（1）同（2）作答即可；

（2）设 $BC=x$（$x>0$），则$AC=\sqrt{2}x$，由旋转性质得$AD=AC=\sqrt{2}x$，$AD\perp AC$．如图，过 B 作 $BH\perp AC$ 交 AC 于 H，设 $AH=m$，$BH=n$，由勾股定理得：$m^2+n^2=AB^2=4$，$(\sqrt{2}x-m)^2+n^2=BC^2=x^2$，进而得到$m=\frac{x^2+4}{2\sqrt{2}x}$，作 $BG\perp AD$ 交 AD 延长线于 G，同理得$n=\frac{8-x^2}{\sqrt{2}x}$，代入 $m^2+n^2=4$ 得$(\frac{x^2+4}{2\sqrt{2}x})^2+(\frac{8-x^2}{\sqrt{2}x})^2=4$，设 $y=x^2$，整理得到 $5y^2-88y+272=0$，求解得到 y 的值，根据 $y=x^2$，$x>0$，可知$x=\sqrt{y}$，即$AC=\sqrt{2y}$，可知 AC 的长．

【解答】解：【概念辨析】①等边三角形：三边相等，任意邻边比为 1，不符合；

②等腰直角三角形：设腰为 1，则底边为$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，不存在比值为$\sqrt{3}$的邻边比，不符合；

③30°角的直角三角形：设 30°角所对的直角边为 1，则斜边为 2，另一直角边为$\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，直角顶点邻边比为$\sqrt{3}$：$1=\sqrt{3}$，符合；

④直角边为 1 和$\sqrt{2}$的直角三角形：斜边为$\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$，短直角边顶点的邻边比为$\sqrt{3}$：$1=\sqrt{3}$，符合；

故答案为：③④；

【问题探究】∵∠DCB=∠DAC，∠D=∠D，

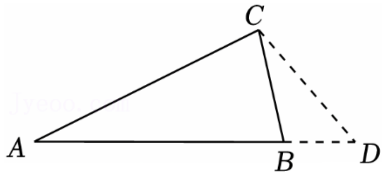
∴△DCB∽△DAC，∴$\frac{BD}{CD}=\frac{CD}{AD}=\frac{CB}{AC}=\frac{1}{2}$，

设 $BD=x$，则 $CD=2x$，$AD=4x$，

∴$AB=AD-BD=3x=3$，∴$x=1$，∴$CD=2x=2$，

∴点 C 在以 D 为圆心，2 为半径的圆上；

【拓展研究】（1）如图，延长 AB 至点 D，使得∠DCB=∠DAC，



∵∠DCB=∠DAC，∠D=∠D，

∴△DCB∽△DAC，

∴$\frac{BD}{CD}=\frac{CD}{AD}=\frac{CB}{AC}=\frac{1}{k}$，

设 $BD=x$，则 $CD=kx$，$AD=k^2x$，

∴$AB=AD-BD=(k^2-1)x=c$，得$x=\frac{c}{k^2-1}$，

$\therefore CD=kx=\frac{kc}{k^2-1}$，

$\therefore$点 C 在以 D 为圆心，$\frac{kc}{k^2-1}$为半径的圆上，

即点 C 所在圆的半径为$\frac{kc}{k^2-1}$；

（2）设 $BC=x$（$x>0$），则$AC=\sqrt{2}x$，由旋转性质得$AD=AC=\sqrt{2}x$，$AD\perp AC$.

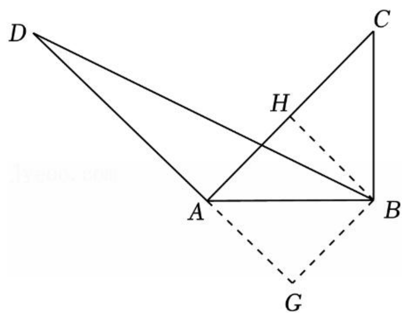
如图，过 B 作 $BH\perp AC$ 交 AC 于 H，

设 $AH=m$，$BH=n$，则$CH=\sqrt{2}x-m$，

由勾股定理得：$m^2+n^2=AB^2=4$，$(\sqrt{2}x-m)^2+n^2=BC^2=x^2$，

由$(\sqrt{2}x-m)^2+n^2=x^2$，得$2x^2+m^2-2\sqrt{2}mx+n^2=x^2$，

$\because m^2+n^2=4$，$\therefore 2x^2+4-2\sqrt{2}mx=x^2$，



整理得：$m=\frac{x^2+4}{2\sqrt{2}x}$，

又 $AD\perp AC$，$BH\perp AC$，故 $BH/\!/AD$，

作 $BG\perp AD$ 交 AD 延长线于 G，则四边形 $AGHB$ 为矩形，

得 $BG=m$，$AG=n$，

在 Rt$\triangle BGD$ 中，由勾股定理得 $BD^2=BG^2+DG^2$，$BD=2\sqrt{5}$，

故$m^2+(\sqrt{2}x+n)^2=20$，

同理可得：$n=\frac{8-x^2}{\sqrt{2}x}$；

$\because m^2+n^2=4$，$\therefore(\frac{x^2+4}{2\sqrt{2}x})^2+(\frac{8-x^2}{\sqrt{2}x})^2=4$，

即$\frac{(x^2+4)^2}{8x^2}+\frac{(8-x^2)^2}{2x^2}=4$，

设 $y=x^2$，则 $y>0$，$y=x^2$，$\therefore\frac{(y+4)^2}{8y}+\frac{(8-y)^2}{2y}=4$，

整理得 $5y^2-88y+272=0$，解得 $y_1=4$，$y_2=\frac{68}{5}$，

经检验，$y_1=4$，$y_2=\frac{68}{5}$均是原分式方程的解，

$\because y=x^2$，$x>0$，$\therefore x=\sqrt{y}$，

$\therefore AC=\sqrt{2}x=\sqrt{2y}$，$\therefore AC=2\sqrt{2}$或$\frac{2\sqrt{170}}{5}$，

故答案为：$2\sqrt{2}$或$\frac{2\sqrt{170}}{5}$.