八年级下数学期末模拟试题汇编试题解析

（难度：中等偏上）

一．选择题（共 10 小题）

1．【易】△ABC 的三边长分别为 a，b，c，下列条件：①∠A＝∠B－∠C；②∠A：∠B：∠C＝3：4：5；③a^2＝（b+c）（b－c）；④a：b：c＝5：12：13，其中能判断△ABC 是直角三角形的个数有（　　）

A．1 个　　　B．2 个　　　C．3 个　　　D．4 个

【考点】勾股定理的逆定理；三角形内角和定理．

【分析】直角三角形的定义或勾股定理的逆定理是判定直角三角形的方法之一．

【解答】解；①∠A＝∠B－∠C，∠A+∠B+∠C＝180°，解得∠B＝90°，故①是直角三角形；

②∠A：∠B：∠C＝3：4：5，∠A+∠B+∠C＝180°，解得∠A＝45°，∠B＝60°，∠C＝75°，故②不是直角三角形；

③∵a^2＝（b+c）（b－c），∴$a^2+c^2=b^2$，符合勾股定理的逆定理，故③是直角三角形；

④∵a：b：c＝5：12：13，∴$a^2+b^2=c^2$，符合勾股定理的逆定理，故④是直角三角形．

能判断△ABC 是直角三角形的个数有 3 个；

故选：C．

【点评】本题考查了利用直角三角形的定义和勾股定理的逆定理来判定一个三角形是不是直角三角形，是判定直角三角形的常见方法．

2．【较易】如图 1，在四边形 $ABCD$ 中（∠A＜∠ABC），AB＝BC＝CD＝DA，E 是对角线 BD 的中点，点 F 从点 D 出发，沿 D→A→B 方向匀速运动，到达 B 点后停止．设点 F 的运动路程为 x，△DEF 的面积为 y，得到如图 2 所示的函数图象，则对角线 BD 的长为（　　）

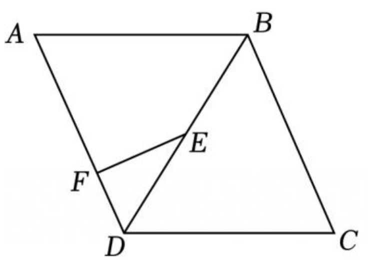


图1

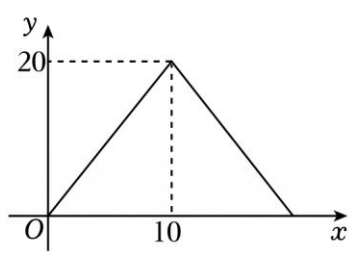


图2

A．43　　　B．$4\sqrt{5}$　　　C．$8\sqrt{5}$　　　D．$3\sqrt{3}$

【考点】动点问题的函数图象．

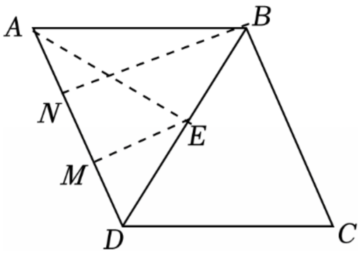
【专题】函数及其图象；推理能力．

【分析】由图 2 可知菱形边长为 10，当点 F 运动到点 A 时面积最大，此时根据面积求高，再利用中位线求解即可.

【解答】解：由图 2 可知 $AD=AB=10$，

过 E 作 $EM\perp AD$ 于点 M，过 B 作 $BN\perp AD$ 于点 N

则 $S_{\triangle AED}=\frac{1}{2}AD\cdot EM=20$，



解得 $EM=4$，

∵E 为 BD 中点，

∴$BN=2EM=8$，

在 Rt△ABN 中，$AN=\sqrt{AB^2-BN^2}=6$，

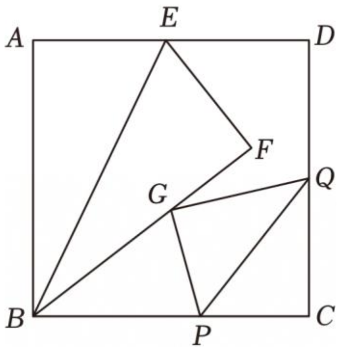
∴$DN=AD-AN=4$，

在 Rt△BND 中，$BD=\sqrt{BN^2+DN^2}=4\sqrt{5}$；

故选：B.

【点评】本题主要考查了动点函数图象分析，熟练掌握相关知识是解题的关键.

3．【中档】如图，已知正方形 $ABCD$ 边长为 8，E 为 AD 中点，将△ABE 沿 BE 翻折得到△FBE，P，Q 分别为边 BC，DC 上一点，将△CPQ 沿 PQ 翻折，使 C 点对应点 G 落在边 BF 上，若 $BG=5$，则 DQ 等于（　　）



A．$\frac{23}{6}$　　　B．$\frac{13}{3}$　　　C．$\frac{7}{2}$　　　D．$\frac{5}{3}\sqrt{5}$

【考点】翻折变换（折叠问题）；正方形的性质.

【专题】平移、旋转与对称；运算能力.

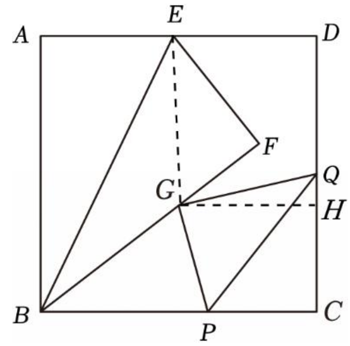
【分析】连接 EG，作 $GH\perp CD$．由正方形的性质可得 $AB=CD=AD=8$，$\angle A=\angle D=90^\circ$，

由折叠的性质可得 $BF=BA=8$，$EF=AE=4$，$\angle F=\angle A=90^\circ$，$\angle ABE=\angle EBG$

进而可得$\angle ABE=\angle BEG$，$AB\parallel EG$，$\angle GED=\angle A=90^\circ$，从而可得四边形 $EGHD$ 是矩形．设 $DQ=x$，

则 $QH=5-x$，$GQ=CQ=8-x$，根据勾股定理列方程求出 x 的值即可得解.

【解答】解：如图，连接 EG，作 $GH\perp CD$.



由题意可得：∴$AB=CD=AD=8$，$\angle A=\angle D=90^\circ$，

∴$AE=DE=4$

∵将△ABE 沿 BE 翻折得到△FBE，

∴$BF=BA=8$，$EF=AE=4$，$\angle F=\angle A=90^\circ$，$\angle ABE=\angle EBG$

∵$BG=5$，∴$GF=BF-BG=3$，

∴$EG=\sqrt{EF^2+GF^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$，

∴$EG=BG$，∴$\angle EBG=\angle BEG$，∴$\angle ABE=\angle BEG$，

∴$AB\parallel EG$，∴$\angle GED=\angle A=90^\circ$，

又∵$GH\perp CD$，$\angle D=90^\circ$，

∴$DH=EG=5$，$GH=ED=4$，

设 $DQ=x$，则 $QH=5-x$

∵将△CPQ 沿 PQ 翻折使 C 点对应点 G 落在边 BF 上，

∴$GQ=CQ=8-x$，$GQ^2=GH^2+QH^2$，

∴$(8-x)^2=4^2+(5-x)^2$，解得$x=\dfrac{23}{6}$，∴$DQ=\dfrac{23}{6}$. 故选：A.

【点评】本题主要考查了正方形的性质，矩形的判定和性质，折叠的性质以及勾股定理，熟练掌握以上知识，正确地作出辅助线是解题的关键.

4.【中档】平面直角坐标系中，已知直线 $y_1=2x-1$，$y_2=(m-2)x-m+3$（$2<m<4$），$y_3=kx-2k+3$（$k<0$），当 $x\leqslant 1$ 时，下列选项正确的是（　　）

A．$y_1\leqslant y_2<y_3$　　B．$y_1<y_2<y_3$　　C．$y_2\leqslant y_1<y_3$　　D．$y_3<y_1\leqslant y_2$

【考点】一次函数与一元一次不等式；一次函数的性质.

【专题】一次函数及其应用；运算能力.

【分析】依据题意，先分别求出 $x=1$ 时，y_1，y_2，y_3 的值，再根据一次函数的性质进而可以判断得解.

【解答】解：当 $x=1$ 时，$y_1=2x-1=2-1=1$，$y_2=(m-2)x-m+3=m-2-m+3=1$，$y_3=kx-2k+3=k-2k+3=-k+3$，

∵$y_1=2x-1$，$y_2=(m-2)x-m+3$（$2<m<4$），$y_3=kx-2k+3$（$k<0$），

∴y_1 随 x 的减小而减小，y_2 随 x 的减小而减小，y_3 随 x 的减小而增大. ∴y_3 最大.

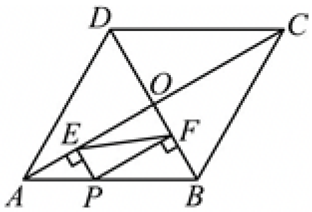
∵$2<m<4$，∴$0<m-2<2$．

∴$y_1=2x-1$ 的图象比 $y_2=(m-2)x-m+3$（$2<m<4$）的图象倾斜度大，且从左到右，逐渐上升．

又∵当 $x=1$ 时，$y_1=y_2$，∴当 $x<1$ 时，$y_1\leqslant y_2$．综上，当 $x\leqslant 1$ 时，$y_1\leqslant y_2<y_3$．故选：A．

【点评】本题主要考查了一次函数与一元一次不等式、一次函数的性质，解题时要熟练掌握并能灵活运用一次函数的性质是关键．

5．【中档】如图，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，点 P 为 AB 边上一动点（不与点 A，B 重合），$PE\perp OA$ 于点 E，$PF\perp OB$ 于点 F，若 $AC=8$，$BD=6$，则 EF 的最小值为（　　）



A．3　　　　B．2　　　　C．$\frac{12}{5}$　　　　D．$\frac{5}{2}$

【考点】矩形的判定与性质；垂线段最短；菱形的性质．

【专题】线段、角、相交线与平行线；等腰三角形与直角三角形；矩形 菱形 正方形；运算能力；推理能力．

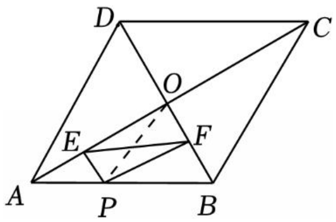
【分析】根据菱形的性质，可证四边形 $OEPF$ 是矩形，如图所示，连接 OP，则 $EF=OP$，当 $OP\perp AB$ 时，OP 的值最小，即 EF 的值最小，再根据等面积法求高即可求解．

【解答】解：∵四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴$AC\perp BD$，$OA=OC=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times 8=4$，$OB=OD=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times 6=3$，

在 Rt△AOB 中，$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$，

如图所示，连接 OP，



∵$PE\perp OA$ 于点 E，$PF\perp OB$ 于点 F，

∴四边形 $OEPF$ 是矩形，

∴$EF=OP$，

当 $OP\perp AB$ 时，OP 的值最小，即 EF 的值最小，

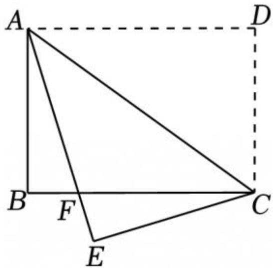
∵$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{1}{2}AB\cdot OP$，

∴$OP=\frac{OA\cdot OB}{AB}=\frac{4\times 3}{5}=\frac{12}{5}$，

∴EF 的最小值为$\frac{12}{5}$，故选：C.

【点评】本题主要考查菱形的性质、矩形的判定与性质、勾股定理及垂线段最短，掌握菱形，矩形的性质，等面积法求三角形的高的计算方法是解题的关键.

6.【中档】如图，矩形 $ABCD$ 沿 AC 折叠，使点 D 落在点 E 的位置，AE 与 BC 相交于点 F，若 AB＝6，BC＝8，则 BF 的长是（　　）



A．3　　B．$\frac{7}{4}$　　C．$\frac{7}{3}$　　D．$\frac{9}{4}$

【考点】翻折变换（折叠问题）；全等三角形的判定与性质；勾股定理；矩形的性质.

【专题】图形的全等；等腰三角形与直角三角形；矩形 菱形 正方形；展开与折叠；几何直观；推理能力.

【分析】先根据矩形与折叠的性质，证明△ABF≌△CEF，得出 BF＝EF，设 BF＝EF＝x，AF＝8﹣x，根据勾股定理建立等式，代入数值进行计算，即可作答.

【解答】解：∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴AB＝CD＝6，BC＝AD＝8，∠B＝∠D＝90°，

∵矩形 $ABCD$ 沿 AC 折叠，使点 D 落在点 E 的位置，

∴CD＝CE＝6，AE＝AD＝8，∠D＝∠E＝90°，

∴AB＝CE＝6，∠B＝∠E＝90°，

在△AFB 和△CFE 中，$\begin{cases}\angle AFB=\angle CFE\\ \angle B=\angle E\\ AB=CE\end{cases}$，

∴△AFB≌△CFE（AAS），∴BF＝EF，

设 BF＝EF＝x，AF＝8﹣x，

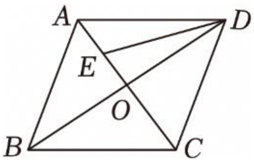
在 Rt△ABF 中，由勾股定理得：BF^2＝AF^2﹣AB^2，即 x^2＝（8﹣x）^{2}﹣6^2，

解得$x=\frac{7}{4}$，∴BF 的长为$\frac{7}{4}$，故选：B.

【点评】本题考查了翻折变换（折叠问题），全等三角形的判定与性质，勾股定理，矩形的性质，正确

掌握相关性质内容是解题的关键.

7.【中档】如图，菱形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=120°$ 对角线 AC、BD 交于点 O，DE 平分 $\angle ADO$ 交 AO 与点 E，且 $OE=\sqrt{3}$，菱形的边长为（　　）



A．$2+\sqrt{3}$　　B．$2+2\sqrt{3}$　　C．$4+2\sqrt{3}$　　D．$4+2\sqrt{2}$

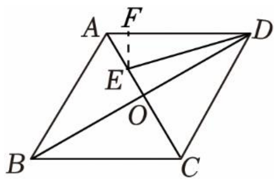
【考点】菱形的性质；等边三角形的判定与性质.

【专题】等腰三角形与直角三角形；矩形 菱形 正方形；运算能力；推理能力.

【分析】作 $EF\perp DA$ 于点 F，由菱形的性质得 $DC=DA=AB$，$OA=OC$，$AC\perp BD$，因为 $\angle BAD=120°$，所以 $\angle CAD=\angle CAB=60°$，则 $\angle AEF=30°$，$\triangle ACD$ 是等边三角形，所以 $AF=\frac{1}{2}AE$，由角平分线的性质得 $EF=OE=\sqrt{3}$，由 $EF=\sqrt{AE^2-AF^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}AE=\sqrt{3}$，求得 $AE=2$，则 $OA=2+\sqrt{3}$，所以 $AD=AC=2OA=4+2\sqrt{3}$，于是得到问题的答案.

【解答】解：作 $EF\perp DA$ 于点 F，则 $\angle AFE=90°$，

∵四边形 $ABCD$ 是菱形，对角线 AC、BD 交于点 O，



∴$DC=DA=AB$，$OA=OC$，$AC\perp BD$，

∵$\angle BAD=120°$，

∴$\angle CAD=\angle CAB=\frac{1}{2}\angle BAD=60°$，

∴$\angle AEF=90°-\angle CAD=30°$，$\triangle ACD$ 是等边三角形，

∴$AF=\frac{1}{2}AE$，

∵DE 平分 $\angle ADO$ 交 AO 与点 E，$EF\perp DA$ 于点 F，$EO\perp DO$ 于点 O，

∴$EF=OE=\sqrt{3}$，

∵$EF=\sqrt{AE^2-AF^2}=\sqrt{AE^2-(\frac{1}{2}AE)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}AE=\sqrt{3}$，

∴$AE=2$，

∴$OA=AE+OE=2+\sqrt{3}$，

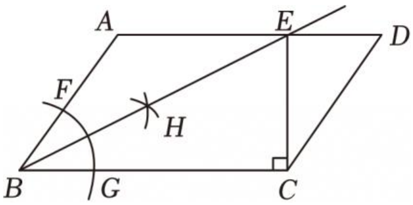
∴$AD=AC=2OA=2（2+\sqrt{3}）=4+2\sqrt{3}$，

∴菱形 $ABCD$ 的边长为 $4+2\sqrt{3}$，故选：C.

【点评】此题重点考查菱形的性质、等边三角形的判定与性质、直角三角形中 30° 角所对的直角边等于斜

边的一半、勾股定理等知识，正确地添加辅助线是解题的关键.

8.【中档】如图，▱$ABCD$ 中，以点 B 为圆心，适当长为半径作弧，交 BA，BC 于 F，G，分别以点 F，G 为圆心，大于$\frac{1}{2}FG$长为半径作弧，两弧交于点 H，作射线 BH 交 AD 于点 E，连接 CE．若 $CE\perp AD$，AD $=3$，$BE=2\sqrt{3}$，则 AB 的长为（　　）



A．1.5　　B．2　　C．$\sqrt{5}$　　D．$2\sqrt{5}$

【考点】作图—基本作图；角平分线的性质；线段垂直平分线的性质；平行四边形的性质．

【专题】多边形与平行四边形；尺规作图；几何直观；运算能力．

【分析】由作图过程可知，BE 为$\angle ABC$ 的平分线，则$\angle ABE=\angle CBE$，再结合平行四边形的性质可得 $AB=AE$．在 Rt△BCE 中，由勾股定理得，$CE=\sqrt{BE^2-BC^2}=\sqrt{3}$．设 $AB=x$，则 $CD=AE=x$，$DE=3-x$，在 Rt△CDE 中，由勾股定理得，$CD^2=CE^2+DE^2$，代入求出 x 的值，即可得出答案．

【解答】解：由作图过程可知，BE 为$\angle ABC$ 的平分线，∴$\angle ABE=\angle CBE$，

∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

∴$AB=CD$，$AD=BC=3$，$AD\parallel BC$，∴$\angle AEB=\angle CBE$，

∴$\angle ABE=\angle AEB$，∴$AB=AE$．

在 Rt△BCE 中，由勾股定理得，$CE=\sqrt{BE^2-BC^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-3^2}=\sqrt{3}$.

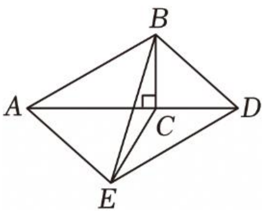
设 $AB=x$，则 $CD=AE=x$，$DE=3-x$，

在 Rt△CDE 中，由勾股定理得，$CD^2=CE^2+DE^2$，

即$x^2=(\sqrt{3})^2+(3-x)^2$，解得 $x=2$，∴AB 的长为 2．故选：B．

【点评】本题考查作图—基本作图、角平分线的定义、平行四边形的性质、勾股定理，熟练掌握角平分线的定义、平行四边形的性质、勾股定理是解答本题的关键．

9.【中档】如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$AC=2\sqrt{3}$，$BC=2$，D 是 AC 延长线上一动点，以 AB，BD 为邻边作平行四边形 $ABDE$，连接 CE，BE，有下列结论：①△ACE 的面积不变；②$AE+BE$ 的最小值为$3\sqrt{3}$；③BE 的最小值为 4．其中正确的是（　　）



A．①②　　B．①③　　C．②③　　D．①②③

【考点】轴对称－最短路线问题；平行线之间的距离；三角形的面积；平行四边形的性质．

【专题】线段、角、相交线与平行线；多边形与平行四边形；平移、旋转与对称；运算能力；推理能力．

【分析】作 $EH\perp AD$ 于点 H，过点 E 作直线 $l\parallel AD$，则 $\angle AHE=\angle DCB=90°$，由平行四边形的性质得 $AE=DB$，$AE\parallel DB$，则 $\angle EAH=\angle BDC$，可证明 $\triangle EAH\cong\triangle BDC$，得 $EH=BC=2$，因为 $AC=2\sqrt{3}$，所以 $S_{\triangle ACE}=\frac{1}{2}AC\cdot EH=2\sqrt{3}$，可判断①正确；可知点 E 在直线 l 上运动，延长 BC 到点 Q，使 BQ 交直线 l 于点 P，且 $PQ=PB$，由直线 l 垂直平分 BQ，得 $BE=QE$，由 $PC=EH=2$，求得 $PQ=PB=4$，则 $CQ=6$，求得 $AQ=\sqrt{AC^2+CQ^2}=4\sqrt{3}$，因为 $AE+QE\geqslant AQ$，所以 $AE+BE\geqslant4\sqrt{3}$，则 $AE+BE$ 的最小值为 $4\sqrt{3}$，可判断②错误；由 $BE\geqslant PB$，得 $BE\geqslant4$，则 BE 的最小值为 4，可判断③正确，于是得到问题的答案．

【解答】解：作 $EH\perp AD$ 于点 H，则 $\angle AHE=90°$，过点 E 作直线 $l\parallel AD$，

∵$\angle ACB=90°$，D 是 AC 延长线上一动点，∴$\angle DCB=90°$，∴$\angle AHE=\angle DCB$，

∵四边形 $ABDE$ 是平行四边形，

∴$AE=DB$，$AE\parallel DB$，∴$\angle EAH=\angle BDC$，

在△EAH 和△BDC 中，$\begin{cases}\angle EAH=\angle BDC\\ \angle AHE=\angle DCB\\ AE=DB\end{cases}$，∴$\triangle EAH\cong\triangle BDC$（$AAS$），∴$EH=BC=2$，

∵$AC=2\sqrt{3}$，∴$S_{\triangle ACE}=\frac{1}{2}AC\cdot EH=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2=2\sqrt{3}$，∴△$ACE$ 的面积不变，故①正确；

∵在点 D 的运动过程中，点 E 到直线 AD 的距离等于 2，∴点 E 在直线 l 上运动，

延长 BC 到点 Q，使 BQ 交直线 l 于点 P，且 $PQ=PB$，点 Q 与点 B 在直线 l 的异侧，

∵$\angle EPQ=\angle ACQ=90°$，

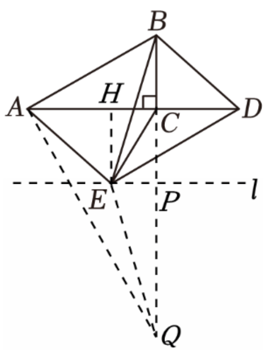
∴直线 l 垂直平分 BQ，∴$BE=QE$，

∵$PC=EH=2$，

∴$PQ=PB=BC+PC=2+2=4$，

∴$CQ=PQ+PC=4+2=6$，∴$AQ=\sqrt{AC^2+CQ^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+6^2}=4\sqrt{3}$，

∵$AE+QE\geqslant AQ$，∴$AE+BE\geqslant4\sqrt{3}$，



∴$AE+BE$ 的最小值为 $4\sqrt{3}$，故②错误；

∵$BE \geqslant PB$，∴$BE \geqslant 4$，∴BE 的最小值为 4，

故③正确，故选：B．

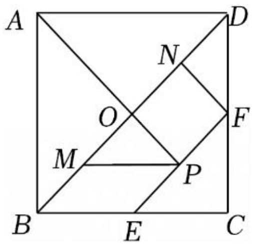
【点评】此题重点考查轴对称 - 最短路线问题、平行四边形的性质、全等三角形的判定与性质、勾股定理、垂线段最短等知识，正确地添加辅助线是解题的关键．

10．【中档】七巧板是一种古老的中国传统智力玩具，如图，在正方形纸板 $ABCD$ 中，BD 为对角线，E，F 分别为 BC，CD 的中点，$AP \perp EF$ 分别交 BD，EF 于 O，P 两点，M，N 分别为 BO，DO 的中点，连接 MP，NF，沿图中实线剪开即可得到一副七巧板．则在剪开之前，关于该图形，下列说法正确的有（　　）

①图中的三角形都是等腰直角三角形；

②四边形 $MPEB$ 是菱形；

③四边形 $PFDM$ 的面积占正方形 $ABCD$ 面积的$\frac{1}{4}$．



A．只有①　　B．①②　　C．①③　　D．②③

【考点】正方形的性质；七巧板；等腰直角三角形；三角形中位线定理；菱形的判定与性质．

【专题】几何综合题；推理能力．

【分析】①利用正方形的性质和中位线的性质可以解决问题；

②利用①的结论可以证明 $OM \neq MP$ 解决问题；

③如图，过 M 作 $MG \perp BC$ 于 G，设 $AB=BC=x$，利用正方形的性质与中位线的性质分别求出 BE 和 MG 即可判定是否正确．

【解答】解：①如图，∵E，F 分别为 BC，CD 的中点，

∴EF 为△CBD 的中位线，∴$EF \parallel BD$，

∵$AP \perp EF$，∴$AP \perp BD$，

∵四边形 $ABCD$ 为正方形，∴A、O、P、C 在同一条直线上，

∴△ABC、△ACD、△ABD、△BCD、△OAB、△OAD、△OBC、△OCD、△EFC 都是等腰直角三角形，

∵M，N 分别为 BO，DO 的中点，∴$MP \parallel BC$，$NF \parallel OC$，

∴△DNF、△OMP 也是等腰直角三角形．故①正确；

②根据①得 $OM=BM=\frac{\sqrt{2}}{2}PM$，∴$BM\neq PM$

∴四边形 $MPEB$ 不可能是菱形．故②错误；

③∵E，F 分别为 BC，CD 的中点，

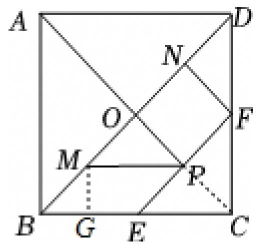
∴$EF\parallel BD$，$EF=\frac{1}{2}BD$，

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，且设 $AB=BC=x$，∴$BD=\sqrt{2}x$，

∵$AP\perp EF$，

∴$AP\perp BD$，∴$BO=OD$，∴点 P 在 AC 上，∴$PE=\frac{1}{2}EF$，∴$PE=BM$，

∴四边形 $BMPE$ 是平行四边形，∴$BO=\frac{1}{2}BD$，



∵M 为 BO 的中点，∴$BM=\frac{1}{4}BD=\frac{\sqrt{2}}{4}x$，

∵E 为 BC 的中点，∴$BE=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}x$，

过 M 作 $MG\perp BC$ 于 G，

∴$MG=\frac{\sqrt{2}}{2}BM=\frac{1}{4}x$，∴四边形 $BMPE$ 的面积$=BE\cdot MG=\frac{1}{8}x^2$，

∴四边形 $BMPE$ 的面积占正方形 $ABCD$ 面积的$\frac{1}{8}$.

∵E、F 是 BC，CD 的中点，∴$S_{\triangle CEF}=\frac{1}{4}S_{\triangle CBD}=\frac{1}{8}S_{\text{四边形}ABCD}$，

∴四边形 $PFDM$ 的面积占正方形 $ABCD$ 面积的（$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}$）$=\frac{1}{4}$．故③正确．故选：$C$．

【点评】本题主要考查了正方形的性质，同时也利用了中位线的性质，也考查了正方形的面积公式和三角形的面积公式，综合性比较强，能力要求比较高．

二．填空题（共 5 小题）

11．【较易】在平面直角坐标系中，一次函数 $y=kx+3k-2$ 的图象交 y 轴正半轴于点 A，下列结论：①一次函数 $y=kx+3k-2$ 经过点（-3，-2）；②$k<\frac{2}{3}$且 $k\neq0$；③方程$kx+3k-2=\frac{2}{3}x$的解为 $x=-3$；④若 $x<-3$ 时，则（$3k-2$）$x+9k-6>0$．其中正确的有<u>　①③　</u>（填写序号即可）．

【考点】一次函数与一元一次不等式；一次函数与一元一次方程．

【专题】一次函数及其应用；运算能力．

【分析】根据一次函数与 y 轴交点坐标的正负性确定 k 的范围，代入点坐标验证点是否在函数图象上，

解方程及不等式判断结论的正确性．

【解答】解：根据一次函数性质、解方程、解不等式等知识逐项分析判断如下：

对于结论①，当 $x=-3$ 时，$y=k\times(-3)+3k-2=-3k+3k-2=-2$，

故函数经过点（-3，-2），结论正确；

对于结论②，函数交 y 轴正半轴于点 A，则 $x=0$ 时，$y=3k-2>0$，解得$k>\frac{2}{3}$，故结论②错误；

对于结论③，方程$kx+3k-2=\frac{2}{3}x$可化为（$3k-2$）（$x+3$）$=0$，由于函数交 y 轴正半轴，$k>\frac{2}{3}$，$3k-2\neq0$，故 $x+3=0$，解得 $x=-3$，结论正确；

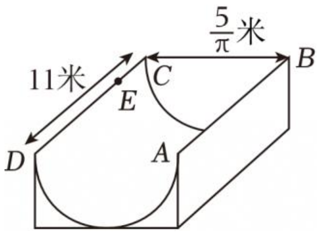
对于结论④，不等式（$3k-2$）$x+9k-6>0$ 可化为（$3k-2$）（$x+3$）>0，

当 $x<-3$ 时，$x+3<0$，而$k>\frac{2}{3}$时 $3k-2>0$，

故（$3k-2$）（$x+3$）<0，结论错误．故答案为：①③．

【点评】此题考查了一次函数、解方程、解不等式等知识．熟练掌握以上知识点是关键．

12．【中档】如图，这是一个供滑板爱好者使用的 U 型池的示意图，该 U 型池可以看作是长方体去掉一个“半圆柱”而成，中间可供滑行部分的截面是直径为$\frac{5}{\pi}$米的半圆，其边缘 $AB=CD=11$ 米，点 E 在 CD 上，$CE=1$ 米．一滑板爱好者从 A 点滑到 E 点，则他滑行的最短距离是__$\frac{5\sqrt{17}}{2}$米__．



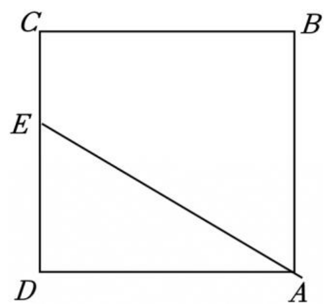
【考点】平面展开－最短路径问题．

【专题】等腰三角形与直角三角形；应用意识．

【分析】要求滑行的最短距离，需将该 U 型池的侧面展开，进而根据“两点之间线段最短”得出结果，U 型池的侧面展开图是一个长方形，此长方形的宽等于半径为$\frac{5}{2\pi}$的半圆的弧长，长方形的长等于 $AB=CD=11$ 米．

【解答】解：如图是其侧面展开图：

$AD=\frac{1}{2}\pi\times\frac{5}{\pi}=\frac{5}{2}$（米），$AB=CD=11$（米），$DE=CD-CE=10$（米），



在 Rt△ADE 中，$10^2+(\frac{5}{2})^2=AE^2$，

解得 $AE=\frac{5\sqrt{17}}{2}$（负值舍去），

故他滑行的最短距离约为$\frac{5\sqrt{17}}{2}$（米）.

故答案为：$\frac{5\sqrt{17}}{2}$米.

【点评】本题考查了平面展开 - 最短路径问题，熟练掌握该知识点是关键.

13.【较易】一组数据的方差计算如下：$s^2=\frac{1}{4}[(3-\overline{x})^2+(4-\overline{x})^2+(4-\overline{x})^2+(5-\overline{x})^2]$，则这组数据的方差 $s^2=$ ___0.5___ .

【考点】方差；算术平均数.

【专题】统计的应用；运算能力.

【分析】由题意知，这组数据为 3、4、4、5，据此求出平均数，继而代入计算即可.

【解答】解：由题意知，这组数据为 3、4、4、5，

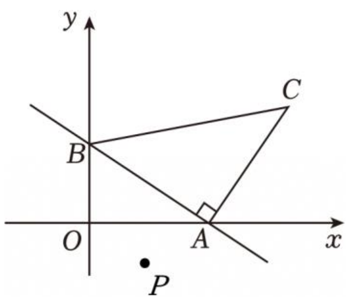
所以$\overline{x}=\frac{3+4+4+5}{4}=4$，

则 $s^2=\frac{1}{4}[(3-\overline{x})^2+(4-\overline{x})^2+(4-\overline{x})^2+(5-\overline{x})^2]$

$=\frac{1}{4}\times[(3-4)^2+(4-4)^2+(4-4)^2+(5-4)^2]=0.5$，故答案为：0.5.

【点评】本题主要考查方差，解题的关键是掌握方差的定义.

14.【中档】已知，直线$y=-\frac{2}{3}x+2$与 x 轴、y 轴分别相交于 A、B，以线段 AB 为直角边在第一象限内作等腰 Rt△ABC，$\angle BAC=90°$ 且点 P（1，a）为坐标系中的一个动点，现要使得△ABC 和△ABP 的面积相等，则实数 a 的值为___-3 或$\frac{17}{3}$___ .



【考点】一次函数图象上点的坐标特征；等腰三角形的性质；勾股定理.

【专题】一次函数及其应用；运算能力.

【分析】先根据题意求出 A、B 两点的坐标，进而求出△ABC 的面积，再根据△ABC 和△ABP 的面积相

等分情况列出等式解答即可.

【解答】解：由条件可知点 B 的坐标为（0，2），点 A 的坐标为（3，0），

∴OA=3，OB=2，

∴$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{13}$，

又∵△ABC 为等腰直角三角形，∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB^2=\frac{13}{2}$，

当点 P 在第四象限时，a<0，

∵$S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}OA\cdot OB=3$，$S_{\triangle APO}=\frac{1}{2}OA\cdot|a|=-\frac{3}{2}a$，$S_{\triangle BOP}=\frac{1}{2}OB\times 1=1$，

∴$S_{\triangle ABP}=S_{\triangle ABO}+S_{\triangle APO}-S_{\triangle BOP}=S_{\triangle ABC}=\frac{13}{2}$，

即$3-\frac{3}{2}a-1=\frac{13}{2}$，解得：$a$=﹣3；

当点 P 在第一象限时，a>0，

∵$S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}OA\cdot OB=3$，$S_{\triangle APO}=\frac{1}{2}OA\cdot|a|=\frac{3}{2}a$，$S_{\triangle BOP}=\frac{1}{2}OB\times 1=1$，

∴$S_{\triangle ABP}=S_{\triangle BOP}+S_{\triangle APO}-S_{\triangle ABO}=S_{\triangle ABC}=\frac{13}{2}$，

即$1+\frac{3}{2}a-3=\frac{13}{2}$，解得：$a=\frac{17}{3}$；

综上所述，实数 a 的值为﹣3 或$\frac{17}{3}$.

【点评】本题考查了一次函数与坐标轴的交点坐标，勾股定理，等腰三角形的性质等知识点，熟练掌握以上知识点是解答本题的关键.

15.【中档】已知直线l_1：$y=kx+\sqrt{3}k+1(k\neq 0)$恒过定点 P（a，b），点$Q(m,\ -\frac{\sqrt{3}}{3}m+2)$在第一象限内，且点 Q 恒在直线 l_2 上，直线 l_2 与 x，y 轴分别交于 A、B 两点，直线 PB 与直线 OQ 交于点 M（p，q），当线段 OQ 长度最小时，下列结论中正确的是__①②③④__.

①点 Q 坐标为$(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{3}{2})$；②$OQ\perp OP$；③点 M 的坐标为$(\sqrt{3},\ 3)$；④OP=2

【考点】两条直线相交或平行问题；勾股定理.

【专题】一次函数及其应用；运算能力.

【分析】把解析式变形为 $y=kx+\sqrt{3}k+1=k(x+\sqrt{3})+1$，即可求得定点 P（$-\sqrt{3}$，1），利用勾股定理求得 OP，即可判断④；由点$Q(m,\ -\frac{\sqrt{3}}{3}m+2)$可知直线 l_2 为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+2$，由线段 OQ 长度最小时，$OQ\perp$直线 l_2，即可得到直线 OQ 的解析式为 $y=\sqrt{3}x$，解析式联立求得点 Q 坐标为$(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{3}{2})$，即可判断①；

求得直线 OP 的解析式，根据两直线垂直斜率之积为 - 1 即可判断②；利用待定系数法求得直线 PB 的解析式，与直线 OQ 的解析式联立即可求得点 M 的坐标为$(\sqrt{3}，3)$.即可判断③.

【解答】解：∵$y=kx+\sqrt{3}k+1=k（x+\sqrt{3}）+1$，

∴$P（-\sqrt{3}，1）$，∴$OP=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$，故④正确；

∵点$Q(m，-\frac{\sqrt{3}}{3}m+2)$在第一象限内，且点 Q 恒在直线 l_2 上，

∴直线 l_2 为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+2$，

∵线段 OQ 长度最小时，$OQ\perp$直线 l_2，

∴直线 OQ 的解析式为 $y=\sqrt{3}x$，解$\begin{cases}y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+2\\y=\sqrt{3}x\end{cases}$，得$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{2}\\y=\frac{3}{2}\end{cases}$，

∴点 Q 坐标为$(\frac{\sqrt{3}}{2}，\frac{3}{2})$，故①正确；

∵$P（-\sqrt{3}，1）$，∴直线 OP 为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$，

∵$-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{3}=-1$，∴$OQ\perp OP$，故②正确；

∵直线 l_2 与 x，y 轴分别交于 A、B 两点，∴$B（0，2）$，

设直线 PB 的解析式为 $y=ax+b$，则$\begin{cases}-\sqrt{3}a+b=1\\b=2\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=\frac{\sqrt{3}}{3}\\b=2\end{cases}$，

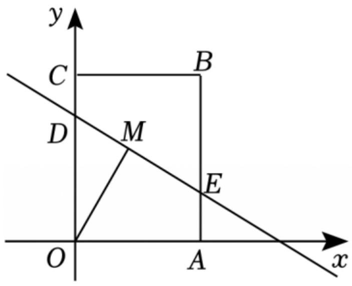
∴直线 PB 的解析式为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2$，解$\begin{cases}y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2\\y=\sqrt{3}x\end{cases}$，得$\begin{cases}x=\sqrt{3}\\y=3\end{cases}$，

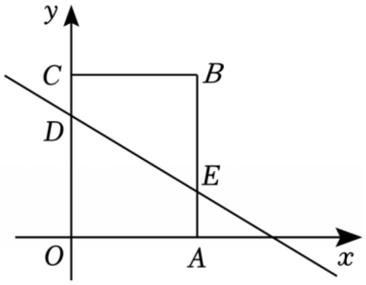
∴点 M 的坐标为$(\sqrt{3}，3)$．故答案为：①②③④．

【点评】本题是两条直线相交或平行问题，考查了直线恒过定点的求法、待定系数法求函数的解析式，线段最短问题、两直线垂直的判定、直线交点坐标等知识．

三．解答题（共 6 小题）

16．【中档】如图，矩形 $OABC$ 的顶点 A、C 分别在 x 轴、y 轴的正半轴上，点 B 的坐标为（3，4），一次函数$y=-\frac{2}{3}x+b$的图象与边 OC、AB 分别交于点 D、E，且 $OD=BE$．点 M 是线段 DE 上的一个动点．





备用图

（1）求 b 的值；

（2）连结 OM，若三角形 ODM 的面积与四边形 $OAEM$ 的面积之比为 1：3，求点 M 的坐标；

（3）设点 N 是平面内的一点，以 O、D、M、N 为顶点的四边形是菱形，直接写出点 M 的坐标．

【考点】四边形综合题．

【专题】矩形 菱形 正方形；推理能力．

【分析】（1）利用矩形的性质，用 b 表示点 E 的坐标，再利用待定系数法即可解决问题；

（2）首先求出四边形 $OAED$ 的面积，再根据条件求出△ODM 的面积，则由三角形面积可求得点 M 的横坐标，即可解决问题；

（3）分三种情况：①当四边形 $OMDN$ 是菱形时，②当四边形 $OMND$ 是菱形时，③当四边形 $ONMD$ 是菱形时，根据菱形的性质即可得出点 M 的坐标．

【解答】解：（1）在$y=-\frac{2}{3}x+b$中，令 $x=0$，

∴$y=b$，

∴点 D 的坐标是（0，b），

∴$OD=b$，

∵$OD=BE$，

∴$BE=b$，

∵B 的坐标为（3，4），

∴点 E 的坐标为（3，$4-b$），

把 E 点坐标代入$y=-\frac{2}{3}x+b$得 $4-b=-2+b$，

解得 $b=3$．

（2）∵B 的坐标为（3，4），$b=3$，

∴$OD=BE=3$，

∴$AE=1$，

$\therefore S_{四边形OAED}=\frac{1}{2}(OD+AE)\cdot OA=\frac{1}{2}\times(3+1)\times 3=6$，

$\because\triangle ODM$ 的面积与四边形 $OAEM$ 的面积之比为 1：3，

$\therefore S_{\triangle ODM}=\frac{1}{4}S_{四边形OAED}=1.5$，

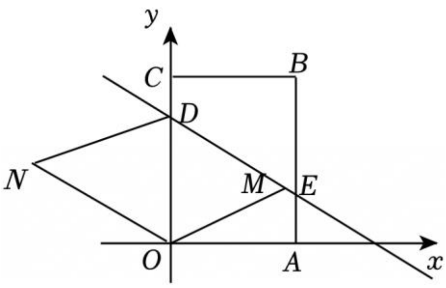
即$\frac{1}{2}\times 3x_M=1.5$，

解得 $x_M=1$，

把 $x_M=1$ 代入$y=-\frac{2}{3}x+3$得$y_M=-\frac{2}{3}\times 1+3=\frac{7}{3}$,

$\therefore$点 M 的坐标是$(1，\frac{7}{3})$.

（3）当四边形 $OMDN$ 是菱形时，如图，



$\because$四边形 $OMDN$ 是菱形，

$\therefore MN$、OD 互相垂直平分，

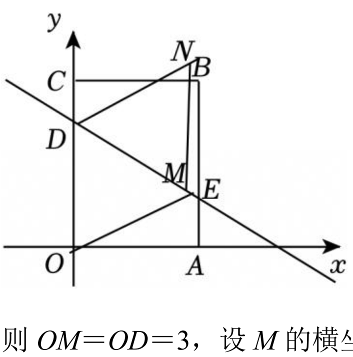
$\therefore M$ 的纵坐标是$\frac{3}{2}$,

$\therefore -\frac{2}{3}x+3=\frac{3}{2}$,

解得$x=\frac{9}{4}$,

$\therefore M$ 的坐标是$(\frac{9}{4}，\frac{3}{2})$；

当四边形 $OMND$ 是菱形时，如图，



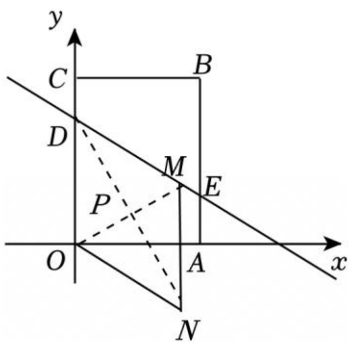
则 $OM=OD=3$，设 M 的横坐标是 m，则纵坐标是$-\frac{2}{3}m+3$，

$\therefore m^2+(-\frac{2}{3}m+3)^2=9$，

解得：$m=\frac{36}{13}$或 0（舍去）.

∴M 的坐标是$(\frac{36}{13}，\frac{15}{13})$；

当四边形 $ONMD$ 是菱形时，如图，



设 OM 交 DN 于 P，则 $DN\perp OM$，点 P 为 OM，DN 的中点，

设$M(x，-\frac{2}{3}x+3)$，则$P(\frac{x}{2}，-\frac{1}{3}x+\frac{3}{2})$，

∴$OP^2=(\frac{x}{2})^2+(-\frac{1}{3}x+\frac{3}{2})^2=\frac{13}{36}x^2-x+\frac{9}{4}$，

$DP^2=(\frac{x}{2})^2+(-\frac{1}{3}x+\frac{3}{2}-3)^2=\frac{13}{36}x^2+x+\frac{9}{4}$，

在 Rt△OPD 中，由勾股定理得：

$\frac{13}{36}x^2-x+\frac{9}{4}+\frac{13}{36}x^2+x+\frac{9}{4}=3^2$，

解得：$x=\frac{9\sqrt{13}}{13}$（负值舍去），

∴$M(\frac{9\sqrt{13}}{13}，-\frac{6\sqrt{13}}{13}+3)$.

综上所述，点 M 的坐标是$(\frac{9}{4}，\frac{3}{2})$或$(\frac{36}{13}，\frac{15}{13})$或$(\frac{9\sqrt{13}}{13}，-\frac{6\sqrt{13}}{13}+3)$.

【点评】本题考查矩形的性质，菱形的性质，四边形的面积等知识，解题关键是掌握菱形的性质进行分类讨论，并且能够利用一次函数图象上点的坐标特征，用点的坐标表示线段长.

17.【较难】如图，边长为 5 的正方形 $OABC$ 的顶点 O 在坐标原点处，点 A、C 分别在 x 轴、y 轴的正半轴上，点 E 是 OA 边上的点（不与点 A 重合）$EF\perp CE$，且与正方形外角平分线 AG 交于点 P.

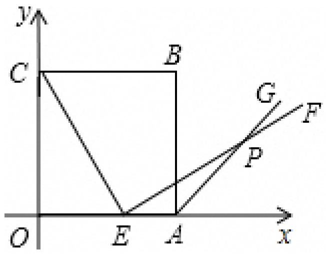
（1）求证：$CE=EP$

（2）若点 E 坐标为（3、0）时.

①在 y 轴上是否存在点 M 使得四边形 $BMEP$ 是平行四边形？若存在，求出点 M 的坐标；若不存在，说明理由.

②在平面内是否存在点 Q，使四边形 $CEPQ$ 为正方形，若存在，请直接写出 Q 点坐标，若不存在，说

明理由.



【考点】四边形综合题.

【专题】几何综合题；推理能力.

【分析】（1）在 OC 上截取 $OK=OE$．连接 EK，求出 $\angle KCE=\angle PEA$，根据 ASA 推出 $\triangle CKE\cong\triangle EAP$，根据全等三角形的性质得出即可；

（2）①过点 B 作 $BM\parallel PE$ 交 y 轴于点 M，根据 ASA 推出 $\triangle BCM\cong\triangle COE$，根据全等三角形的性质得出 $BM=CE$，求出 $BM=EP$．根据平行四边形的判定得出四边形 $BMEP$ 是平行四边形，即可求出答案.

②存在点 Q 使四边形 $CEPQ$ 是正方形，过点 Q 作 $QH\perp y$ 轴于点 Q，证 $\triangle HCQ\cong\triangle OEC$ 得 $HC=OE=3$，$HQ=OC=5$，据此知 $HO=8$，从而得出答案.

【解答】（1）证明：如图 1，在 OC 上截取 $OK=OE$．连接 EK，

$\because OC=OA$，$\angle COA=\angle BAO=90°$，$\angle OEK=\angle OKE=45°$，

$\because AP$ 为正方形 $OCBA$ 的外角平分线，$\therefore \angle BAP=45°$，

$\therefore \angle EKC=\angle PAE=135°$，$\therefore CK=EA$，

$\because EC\perp EP$，

$\therefore \angle CEF=\angle COE=90°$，

$\therefore \angle CEO+\angle KCE=90°$，$\angle CEO+\angle PEA=90°$，

$\therefore \angle KCE=\angle PEA$，

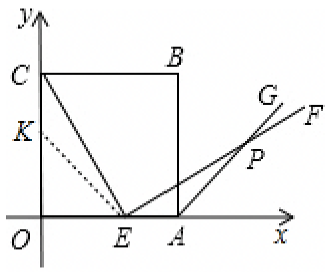


图1

在 $\triangle CKE$ 和 $\triangle EAP$ 中，$\begin{cases}\angle KCE=\angle PEA\\ CK=EA\\ \angle CKE=\angle EAP\end{cases}$，$\therefore \triangle CKE\cong\triangle EAP$（$ASA$），$\therefore EC=EP$；

（2）①解：y 轴上存在点 M，使得四边形 $BMEP$ 是平行四边形.

如图 2，过点 B 作 $BM\parallel PE$ 交 y 轴于点 M，连接 BP，EM，

则 $\angle CQB=\angle CEP=90°$，

所以 $\angle OCE=\angle CBQ$，

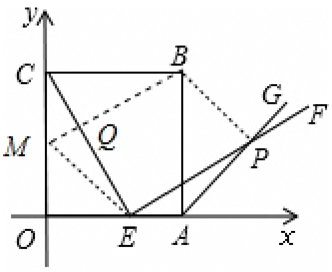


图 2

∵在△BCM和△COE中，

∵$\begin{cases}\angle CBM=\angle OCE\\ BC=OC\\ \angle BCM=\angle COE\end{cases}$，∴△$BCM$≌△$COE$（$ASA$），

∴BM＝CE，

∵CE＝EP，∴BM＝EP.

∵BM∥EP，∴四边形$BMEP$是平行四边形，

∵△BCM≌△COE，∴CM＝OE＝3，∴OM＝CO－CM＝2．故点M的坐标为（0，2）.

②如图3，存在点Q使四边形$CEPQ$是正方形，

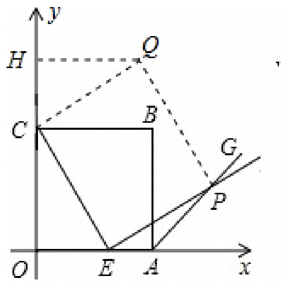


图 3

过点Q作QH⊥y轴于点Q，则∠QHC＝∠COE＝90°，

∴∠HQC+∠HCQ＝90°，

∵∠QCE＝90°，∴∠HCQ+∠ECO＝90°，∴∠ECO＝∠HQC，

∵四边形$CEPQ$是正方形，

∴CQ＝EC，∴△HCQ≌△OEC（AAS），

∴HC＝OE＝3，HQ＝OC＝5，则HO＝8，∴点Q的坐标为（5，8）.

【点评】本题是四边形的综合问题，考查了正方形的性质，全等三角形的性质和判定，平行四边形的性质和判定的应用，能灵活运用知识点进行推理是解此题的关键，综合性比较强，难度偏大.

18.【较难】我们定义：对角线互相垂直且相等的四边形叫做“神奇四边形”.

（1）在我们学过的下列四边形①平行四边形②矩形③菱形④正方形中，是“神奇四边形”的是 <u>④</u> ；

（2）如图1，在正方形$ABCD$中，E为BC上一点，连接AE，过点B作BG⊥AE于点H，交CD于点G，连接AG、EG.

①判定四边形$ABEG$是否为“神奇四边形” <u>是</u> （填“是”或“否”）；

②如图2，点M、N、P、Q分别是AB、AG、GE、EB的中点．证明四边形$MNPQ$是“神奇四边形”；

（3）如图3，点F、R分别在正方形$ABCD$的边AB、CD上，把正方形沿直线FR翻折，使得BC的对应边$B'C'$恰好经过点A，过点A作AO⊥FR于点O，若AB'＝2，正方形的边长为6，求线段OF的长

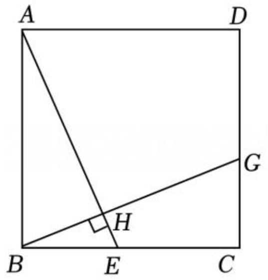


图1

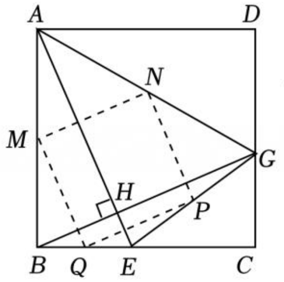


图2

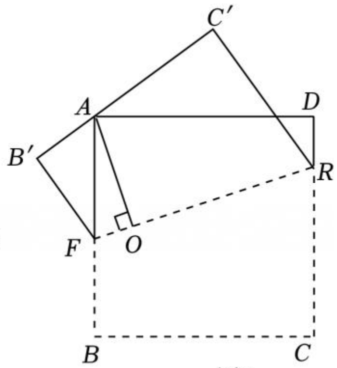


图3

.

【考点】四边形综合题.

【专题】几何综合题；几何直观；运算能力；推理能力.

【分析】(1) 由“神奇四边形”的定义即可得出结论；

(2) ①证△ABE≌△BCG（ASA），得 $AE=BG$，再由“神奇四边形”的定义即可得出结论；

②由三角形中位线定理得出 $MN=PQ$，$MQ=NP$，则四边形 $MNPQ$ 为平行四边形，再证四边形 $MNPQ$ 是正方形，则可得出结论；

(3) 延长 AO 交 BC 于 S，由勾股定理求出 AO 的长，设 $AF=x$，则 $BF=B'F=6-x$，再由勾股定理得 $2^2+(6-x)^2=x^2$，解得 $x=\frac{10}{3}$，即可解决问题.

【解答】(1) 解：∵平行四边形的对角线互相平分，矩形的对角线互相平分且相等，菱形的对角线互相垂直平分，正方形的对角线互相垂直平分且相等，

∴正方形是“神奇四边形”，故答案为：④；

(2) ①解：∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$\angle ABC=\angle BCD=90°$，∴$\angle ABG+\angle CBG=90°$，

∵$BG\perp AE$，∴$\angle BAE+\angle ABG=90°$，∴$\angle BAE=\angle CBG$，

在△ABE 和△BCG 中，$\begin{cases}\angle BAE=\angle CBG\\ AB=BC\\ \angle ABE=\angle BCG\end{cases}$，∴△$ABE$≌△$BCG$（$ASA$），∴$AE=BG$，

又∵$BG\perp AE$，∴四边形 $ABEG$ 是“神奇四边形”，故答案为：是；

②证明：∵M，N 为 AB，AG 的中点，∴MN 为△ABG 的中位线，

∴$MN\parallel BG$，$MN=\frac{1}{2}BG$，

同理：$PQ\parallel BG$，$PQ=\frac{1}{2}BG$，$MQ\parallel AE$，$MQ=\frac{1}{2}AE$，$NP\parallel AE$，$NP=\frac{1}{2}AE$，

∴$MN=PQ$，$MQ=NP$，∴四边形 $MNPQ$ 为平行四边形，

∵$AE=BG$，∴$MN=MQ$，∴平行四边形 $MNPQ$ 为菱形，

∵$BG\perp AE$，$MQ/\!/AE$，∴$MQ\perp BG$，

∵$MN/\!/BG$，∴$MQ\perp MN$，∴$\angle QMN=90°$，∴四边形 $MNPQ$ 为正方形，

∴四边形 $MNPQ$ 是“神奇四边形”；

（3）解：如图 3，延长 AO 交 BC 于 S，

由翻折的性质可知，$BF=B'F$，$AB'=BS=2$，$AO=SO$，$\angle B'=\angle B$，

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，边长为 6，

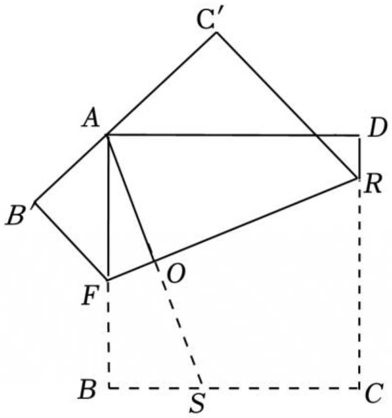


图3

∴$AB=6$，$\angle B=90°$，

∴$AS=\sqrt{AB^2+BS^2}=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$，$\angle B'=\angle B=90°$，

∴$AO=\frac{1}{2}AS=\sqrt{10}$，

设 $AF=x$，则 $BF=B'F=6-x$，

在 Rt△$AB'F$ 中，由勾股定理得：$2^2+(6-x)^2=x^2$，

∴$x=\frac{10}{3}$，∴$AF=\frac{10}{3}$，

∵$AO\perp FR$，∴$\angle AOF=90°$，

∴$OF=\sqrt{AF^2-AO^2}=\sqrt{(\frac{10}{3})^2-(\sqrt{10})^2}=\frac{\sqrt{10}}{3}$，即线段 OF 的长为$\frac{\sqrt{10}}{3}$.

【点评】本题属于四边形综合题，考查了新定义“神奇四边形”、折叠的性质、正方形的判定与性质、菱形的判定与性质、平行四边形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、勾股定理，三角形中位线定理等知识，本题综合性强，理解新定义“神奇四边形”，熟练掌握正方形的判定与性质，解题的关键是正确寻找全等三角形解决问题，学会利用参数解决问题.

19.【较难】如图 1，四边形 $ABCD$ 是正方形，点 E 是边 BC 的中点，$\angle AEF=90°$，且 EF 交正方形外角平分线 CF 于点 F. 请你探究 AE 与 EF 存在怎样的数量关系？并证明你的结论. 经过探究，小明得出结论是 $AE=EF$，而要证明结论 $AE=EF$，就需要证明 AE 和 EF 所在的两个三角形全等，但△ABE 和△ECF 显然不全等（一个是直角三角形一个是钝角三角形），考虑到点 E 是 BC 的中点，小明想到的方法是如图 2，取 AB 的中点 M，连接 EM，证明△AEM≌△EFC，从而得到 $AE=EF$.

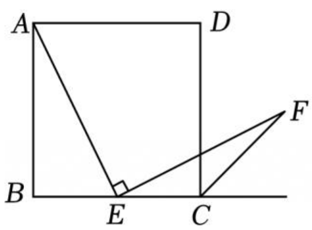


图1

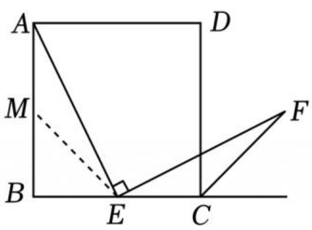


图2

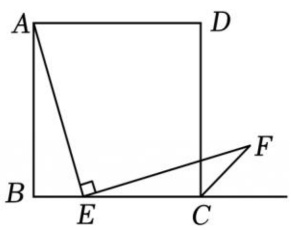


图3

（1）小明的证法中，证明$\triangle AEM\cong\triangle EFC$的依据为（$\underline{C}$ ）；

A．SSS　　　B．SAS　　　C．ASA　　　D．HL

（2）如图3，若把条件“点E是边BC的中点”改为“点E是边BC的任意一点”，其余条件不变，$AE=EF$是否仍然成立？若成立，请写出证明过程，若不成立，请说明理由．

（3）以下与线段BE，CE，AE有关的三个结论：

$AE-CE<\sqrt{2}BE$，$AE-CE=\sqrt{2}BE$，$AE-CE>\sqrt{2}BE$．

你认为哪个正确？请说明理由．

【考点】四边形综合题．

【专题】几何综合题；运算能力．

【分析】（1）需根据图2中辅助线构造的条件，分析$\triangle AEM$和$\triangle EFC$的边和角的关系，结合全等三角形判定定理判断依据．

（2）类似（1），在AB上取合适点M构造全等三角形，通过证明三角形全等得出$AE=EF$．

（3）利用前面证明的全等关系，将线段进行转化，结合等腰直角三角形的性质判断结论．

【解答】解：（1）∵四边形$ABCD$是正方形，M、E分别是AB、BC中点，

∴$AM=EC=BE$，$\angle ABC=\angle BCD=90°$

∴$\angle BME=\angle BEM=45°$，

∴$\angle AME=180°-45°=135°$，

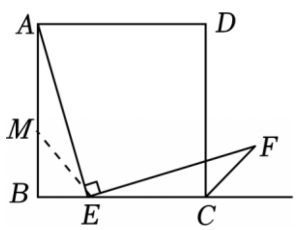
∵CF是外角平分线，∴$\angle DCF=45°$ ∴$\angle ECF=135°=\angle AME$，

∵$\angle ABC=\angle BCD=90°$，∴$\angle BAE+\angle AEB=90°$，

∵$\angle AEF=90°$，∴$\angle BAE=\angle FEC=90°-\angle AEB$．

在$\triangle AEM$和$\triangle EFC$中，$\begin{cases}\angle MAE=\angle CEF\\AM=EC\\\angle AME=\angle ECF\end{cases}$ ∴$\triangle AEM\cong\triangle EFC$（ASA），故答案为：C．

（2）$AE=EF$仍然成立．理由见解析：



在AB上取一点M，使$AM=EC$，连接ME，

∵四边形$ABCD$是正方形，

∴$AB=BC$，$\angle B=\angle BCD=90°$．

∵$AM=EC$，∴$BM=BE$，∴$\angle BME=45°$，∴$\angle AME=135°$．

∵CF是正方形外角平分线，$\angle BCD=90°$，

∴$\angle ECF=135°$，∴$\angle AME=\angle ECF$．

∵$\angle AEF=90°$，∴$\angle AEB+\angle FEC=90°$，

又∠AEB+∠BAE＝90°，∴∠BAE＝∠FEC．

在△AEM和△EFC中，$\begin{cases}\angle MAE=\angle CEF\\ AM=EC\\ \angle AME=\angle ECF\end{cases}$ ∴△AEM≌△EFC（ASA），

∴AE＝EF，即仍然成立．

（3）解：结论$AE-CE<\sqrt{2}BE$成立，理由如下：

由（2）知△AEM≌△EFC，∴AE＝EF，AM＝EC．

∵BM＝BE，∠B＝90°，∴$ME=\sqrt{2}BE$．

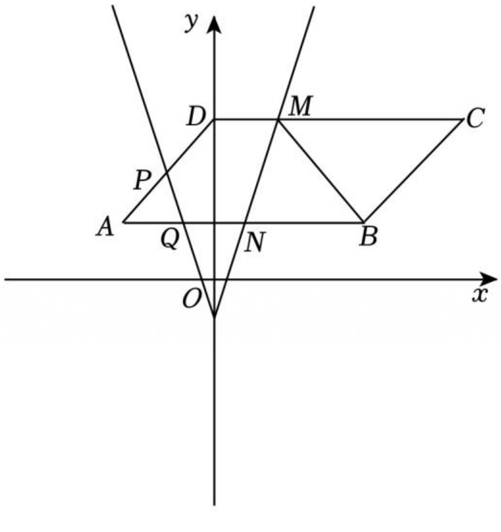
在△AME中，根据三角形三边关系，$AE-AM<ME$，

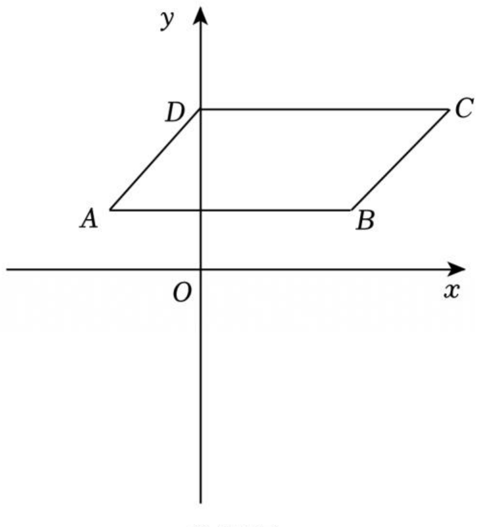
又AM＝EC，$ME=\sqrt{2}BE$，∴$AE-CE<\sqrt{2}BE$，

∴结论$AE-CE<\sqrt{2}BE$成立，结论$AE-CE=\sqrt{2}BE$与$AE-CE>\sqrt{2}BE$都不成立．

【点评】本题主要考查了正方形的性质、全等三角形的判定与性质以及三角形三边关系，熟练掌握全等三角形的判定方法（ASA等 ）和正方形性质，灵活构造全等三角形是解题的关键．

20.【较难】定义：对于给定的一次函数y＝kx+b（k≠0，k、b为常数），把形如$y=\begin{cases}kx+b(x\geq 0)\\ -kx+b(x<0)\end{cases}$（$k$≠0，$k$、$b$为常数）的函数称为一次函数$y$＝$kx$+$b$（$k$≠0，$k$、$b$为常数）的衍生函数．已知▱$ABCD$的顶点坐标分别为$A$（﹣2，1），$B$（3，1），$C$（5，3），$D$（0，3）．





备用图

（1）点E（n，5）在一次函数y＝x+3的衍生函数图象上，则n＝__﹣2或2__；

（2）如图，一次函数y＝kx+b（k≠0，k、b为常数）的衍生函数图象与平行四边形$ABCD$交于M、N、P、Q四点，其中P点坐标是（﹣1，2），并且$S_{\triangle MNB}=\frac{3}{4}$，求该一次函数的解析式；

（3）一次函数y＝kx+b（k≠0，k、b为常数），其中k、b满足3k+b＝2，当一次函数y＝kx+b（k≠0，

k、b 为常数）的衍生函数图象与平行四边形 $ABCD$ 恰好有两个交点时，求 b 的取值范围．

【考点】一次函数综合题．

【专题】一次函数及其应用；运算能力；推理能力．

【分析】（1）求出一次函数 $y=x+3$ 的衍生函数为 $y=\begin{cases}x+3(x\geq 0)\\-x+3(x<0)\end{cases}$，再由题意可得 $-n+3=5$ 或 $n+3=5$，求出 n 的值即可；

（2）由题意可知 $k+b=2$①，设 N（n，1），根据△MNB 的面积可得$\frac{1}{2}\times$（$3-n$）$\times 2=\frac{3}{4}$，求出 N（$\frac{9}{4}$，1），则$\frac{9}{4}k+b=1$②，由①②求出 k、b 的值即可求解析式；

（3）由题可知 $y=kx+2-3k$ 的衍生函数为 $y=\begin{cases}kx+2-3k(x\geq 0)\\-kx+2-3k(x<0)\end{cases}$，当 $k>0$ 时，A 在衍生函数上时，此时衍生函数图象与平行四边形 $ABCD$ 有三个交点，当 $k<0$ 时，D 在衍生函数上时，此时衍生函数图象与平行四边形 $ABCD$ 有两个交点，则 $k>1$ 或 $k\leq -\frac{1}{3}$时，衍生函数图象与平行四边形 $ABCD$ 恰好有两个交点．

【解答】解：（1）一次函数 $y=x+3$ 的衍生函数为 $y=\begin{cases}x+3(x\geq 0)\\-x+3(x<0)\end{cases}$，

∵E（n，5）在一次函数 $y=x+3$ 的衍生函数图象上，

∴ $-n+3=5$ 或 $n+3=5$，解得 $n=2$ 或 -2，

故答案为：-2 或 2；

（2）由定义可知，一次函数 $y=kx+b$ 的衍生函数为$y=\begin{cases}kx+b(x\geq 0)\\-kx+b(x<0)\end{cases}$，

∵P（-1，2）在衍生函数图象上，∴$k+b=2$①，

∵N 点在 AB 上，∴设 N（n，1），

∵N 点在衍生函数图象上，∴$kn+b=1$，

∵$S_{\triangle MNB}=\frac{3}{4}$，∴$\frac{1}{2}\times$（$3-n$）$\times 2=\frac{3}{4}$，解得 $n=\frac{9}{4}$，

∴N（$\frac{9}{4}$，1），∴$\frac{9}{4}k+b=1$②，

由①②可得 $k=-\frac{4}{5}$，$b=\frac{14}{5}$，∴$y=-\frac{4}{5}x+\frac{14}{5}$；

（3）∵$3k+b=2$，∴$y=kx+2-3k$，

∴$y=kx+2-3k$ 的衍生函数为 $y=\begin{cases}kx+2-3k(x\geq 0)\\-kx+2-3k(x<0)\end{cases}$，

当 $k>0$ 时，A 在衍生函数上时，$2k+2-3k=1$，解得 $k=1$，此时衍生函数图象与平行四边形 $ABCD$ 有三个交点，

∴k＞1 时，即 b＜－1，衍生函数图象与平行四边形 $ABCD$ 恰好有两个交点；

当 k＜0 时，D 在衍生函数上时，2－3k＝3，解得 $k=-\frac{1}{3}$，此时衍生函数图象与平行四边形 $ABCD$ 有两个交点，∴$k\leq-\frac{1}{3}$时，即 b≥1，衍生函数图象与平行四边形 $ABCD$ 恰好有两个交点；

综上所述：b＜－1 或 b≥1 且 b≠2 时，衍生函数图象与平行四边形 $ABCD$ 恰好有两个交点．

【点评】本题考查一次函数的图象及性质，熟练掌握一次函数的图象及性质，平行四边形的性质是解题的关键．

21．【难】已知：在平面直角坐标系中，A 点坐标（a，0），B 点坐标为（0，b）．

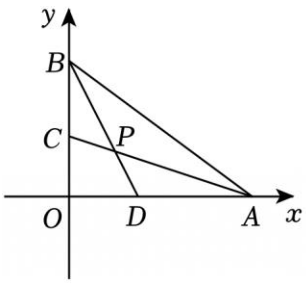


图1

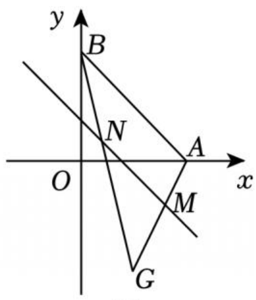


图2

（1）如图 1，P 点为∠OBA 平分线与∠BAO 平分线的交点，连接 AP 并延长交 y 轴于 C，连接 BP 并延长交 x 轴于 D，若$\sqrt{a-4}+|b^2-9|=0$，且 b＞0．

①直接写出 A 点坐标__（4，0）__，B 点坐标__（0，3）__；

②求 P 点坐标．

（2）在（1）的条件下，在坐标轴上有一点 Q，若 $S_{\triangle BPQ}=S_{\triangle BAQ}$，求 Q 点坐标．

（3）若直线 AB 解析式为 y＝－x+3，向下平移直线 AB 得直线 l，如图 2，若 M（m，m^2－4m+3），N（n，n^2－4n+3）在直线 l 上，连接 AM，BN 交于 G 点，求 G 点横坐标．

【考点】一次函数综合题．

【专题】代数几何综合题；几何直观；运算能力；推理能力．

【分析】（1）①根据二次根式和绝对值的非负性可得$\sqrt{a-4}=0$，|b^2－9|＝0，进而可得 a＝4，b＝±3，由 b＞0 可得 b＝3，由此可得 A 点坐标为（4，0），B 点坐标为（0，3）；

②由勾股定理得 AB＝5，过 P 点作 PE⊥OA，PF⊥OB，PG⊥AB，由 P 点为∠OBA 平分线与∠BAO 平分线的交点，可得 P 点也在∠AOB 的角平分线上，进而可得 PG＝PE＝PF，利用面积法可得 PE＝1，PF＝1，从而可得 P（1，1）；

（2）分两种情况考虑：①当 Q 点在 x 轴上时，先求得直线 BD 的表达式为 y＝－2x+3，则可得$D(\frac{3}{2}，0)$，

设 Q（q，0）．由 $S_{\triangle BPQ}=S_{\triangle BAQ}$ 可得 $S_{\triangle BDQ}-S_{\triangle PDQ}=S_{\triangle BAQ}$，列出关于 q 的方程，求出 q 的值即可得 Q 点的坐标为（9，0）或（3，0）．②当 Q 点在 y 轴上时，结合图像发现，此种情况不存在，综上可得 Q 点坐标为（9，0）或（3，0）；

（3）设直线 l 的表达式为 $y=-x+h$，将 M、N 的坐标代入得，$\begin{cases} m^2-4m+3=-m+h① \\ n^2-4n+3=-n+h② \end{cases}$，可得 $m+n=3$，$n=3-m$．设直线 AM 的表达式为 $y=k_1x+b_1$，利用待定系数法可得直线 AM 的表达式为 $y=(m-1)x-3(m-1)$．设直线 BN 的表达式为 $y=k_2x+b_2$，利用待定系数法可得直线 BN 的表达式为 $y=(n-4)x+3$，将两个函数表达式联立，即可求得 G 点的横坐标为$\frac{3}{2}$.

【解答】解：（1）①A 点坐标为（4，0），B 点坐标为（0，3）；理由如下：

∵A 点坐标（a，0），B 点坐标为（0，b），且$\sqrt{a-4}+|b^2-9|=0$，$b>0$，

依题意得：$a-4=0$，$b^2-9=0$，

解得：$a=4$，$b=3$ 或 -3（不合题意，舍去），

∴A 点坐标为（4，0），B 点坐标为（0，3），

故答案为：（4，0），（0，3）；

②∵A（4，0），B（0，3），∴$OA=4$，$OB=3$，

在直角三角形 AOB 中，由勾股定理得：$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=5$，

如图 1，P 点为∠OBA 平分线与∠BAO 平分线的交点，过 P 点作 $PE\perp OA$，$PF\perp OB$，$PG\perp AB$，

∴P 点也在∠AOB 的角平分线上，

∴$PG=PE=PF$，

∴$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}(OA+OB+AB)PE=\frac{1}{2}OA\cdot OB$，

∴（$OA+OB+AB$）$PE=OA\cdot OB$，

∴（4+3+5）$PE=4\times3$，

解得：$PE=1$，∴$PF=1$，∴P（1，1）；

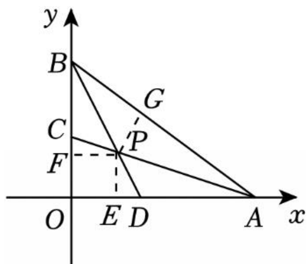


图1

（2）①当 Q 点在 x 轴上时，

设直线 BD 的表达式为 $y=kx+b$，将点 B，点 P 的坐标分别代入，得：

$\begin{cases} b=3 \\ k+b=1 \end{cases}$，解得：$\begin{cases} k=-2 \\ b=3 \end{cases}$，

∴直线 BD 的表达式为 $y=-2x+3$，∴$D(\frac{3}{2}，0)$.

设 Q（q，0），∵$S_{\triangle BPQ}=S_{\triangle BAQ}$，∴$S_{\triangle BDQ}-S_{\triangle PDQ}=S_{\triangle BAQ}$，

∴$\frac{1}{2}DQ\times3-\frac{1}{2}DQ\times1=\frac{1}{2}AQ\times3$，

∴$|\frac{3}{2}-q|\times 3-|\frac{3}{2}-q|\times 1=|4-q|\times 3$，

解得：q_1＝9，q_2＝3，∴Q（9，0）或Q（3，0）；

②当Q点在y轴上时，

∵$S_{\triangle BPQ}$＝$S_{\triangle BAQ}$，且底边都为BQ，

∴△BPQ与△BAQ的高相同，这种情况不存在，

∴Q点不可能在y轴上．综上所述，Q点的坐标为（9，0）或（3，0）；

（3）∵直线AB解析式为y＝﹣x+3，

当y＝0时，得：﹣x+3＝0，解得：x＝3；

当x＝0时，得：y＝3，

∴A（3，0），B（0，3），

∵向下平移直线AB得直线l，∴直线l平行于AB，

设直线l的表达式为y＝﹣x+h，把M（m，m^2﹣4m+3），N（n，n^2﹣4n+3）代入，得：

$\begin{cases} m^2-4m+3=-m+h① \\ n^2-4n+3=-n+h② \end{cases}$，

①﹣②得：（m^2﹣n^2）﹣4（m﹣n）＝﹣（m﹣n），

解得：m+n＝3，∴n＝3﹣m．

设直线AM的表达式为y=k_1x+b_1，将点A，点M的坐标分别代入得：

$\begin{cases} 3k_1+b_1=0 \\ mk_1+b_1=m^2-4m+3 \end{cases}$，解得：$\begin{cases} k_1=m-1 \\ b_1=-3(m-1) \end{cases}$，

∴直线AM的表达式为y＝（m﹣1）x﹣3（m﹣1）．

设直线BN的表达式为y=k_2x+b_2，将点B，点N的坐标分别代入得：

$\begin{cases} b_2=3 \\ nk_2+b_2=n^2-4n+3 \end{cases}$，解得：$\begin{cases} k_2=n-4 \\ b_2=3 \end{cases}$，

∴直线BN的表达式为y＝（n﹣4）x+3．联立得：$\begin{cases} y=(m-1)x-3(m-1) \\ y=(n-4)x+3 \end{cases}$，

整理得：（m﹣1）x﹣3（m﹣1）＝（n﹣4）x+3，

又∵n=3﹣m，

∴（m﹣1）x﹣3（m﹣1）＝（3﹣m﹣4）x+3，整理得：2mx＝3m，

∵m≠0，解得：$x=\frac{3}{2}$，∴G点的横坐标为$\frac{3}{2}$.

【点评】本题属于一次函数综合题，主要考查了角平分线的性质，勾股定理，一次函数与几何的综合应用，面积问题，以及用待定系数法求一次函数的表达式，一次函数求交点问题，熟练掌握以上知识及数形结合思想是解题的关键．